

Inhaltsverzeichnis

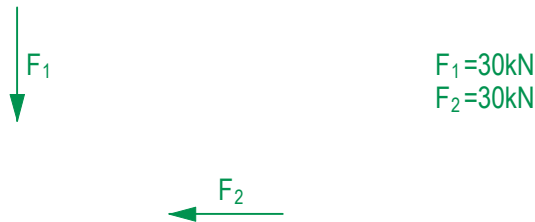
1.1	Resultierende zweier nicht-paralleler Kräfte	2
1.2	Resultierende mehrerer nicht-paralleler Kräfte	3
1.3	Resultierende paralleler Kräfte	4
1.4	Stabilität	5
2.1	Lageplan – Subsystem – Kräfteplan	6
2.2	Form gegeben: Schritt für Schritt	9
2.3	Vergleich: Form gegeben – Form gesucht	10
2.4	Form gesucht: Schritt für Schritt	11
2.5	Dimensionieren	12
2.6	Formelblatt	13
3.1	Von der Punktlast zur gleichmässig verteilten Last	15
3.2	Parabelkonstruktion	16
3.3	Belastungsarten	17
3.4	Lasteinflusszonen	18
4.1	Stützlinie: Hilfsseilpolygon	19
4.2	Form gesucht unter spezifischen Bedingungen	21
4.3	Systeme aufteilen	23
5.1	Auflager	25
5.2	Bogen-Seil-Tragwerke	26
5.3	Vergleich: Spannen – Auskragen	27
6.1	Globales Gleichgewicht	28
6.2	Innere statische Bestimmtheit	30
6.3	Nullstäbe	31
7.1	Überschneidende Elemente	32
7.2	Kräfteverlauf im Balken: Knoten für Knoten	33
7.3	Kräfteverlauf im Balken: Überlagerung	34
8.1	Umlenkung von Kräften	35
9.1	Übertragen vertikaler Kräfte	36
10.1	Horizontale Kräfte	37
10.2	Knicken	38

1.1

Resultierende zweier nicht-paralleler Kräfte

Gegeben sind zwei nicht parallele Kräfte F_1 und F_2 . Gesucht ist die Grösse der Resultierenden sowie deren Position im Lageplan.

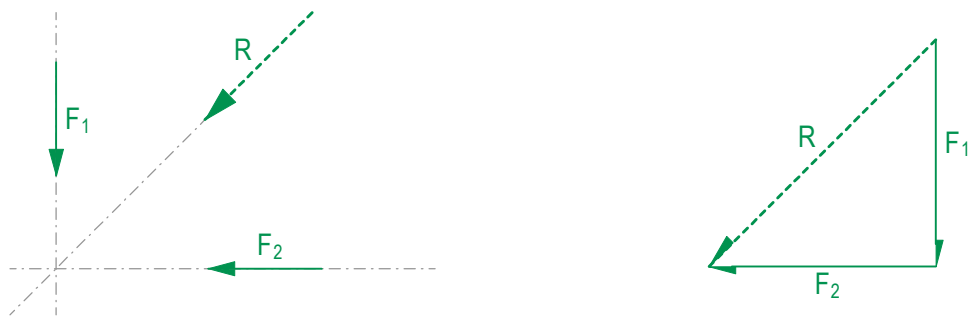
Bei der Resultierenden handelt es sich um die Vektoraddition aller auf das System einwirkenden Kräfte. In der grafischen Statik werden dabei die Eigenschaften der Vektoren (Kräfte) in zwei unterschiedlichen Zeichnungen grafisch festgehalten. Im Lageplan ist die Position und die Richtung der angreifenden Kräfte sowie die Geometrie des Tragwerks massstäblich verkleinert dargestellt. Im Kräfteplan wird hingegen die Richtung und die Grösse der Kraft aufgezeichnet.



Die beiden angreifenden Kräfte werden der Reihe nach (im Uhrzeigersinn) im Kräfteplan aufgezeichnet. Die Richtung der Kräfte wird beibehalten, deren Länge im Kräfteplan entspricht der Grösse der Kraft. Diese Länge wird durch den Massstab des Kräfteplans bestimmt, wobei ein Zentimeter [cm] jeweils einer bestimmten Anzahl Kilonewton [kN] entspricht. Mit dem vorgegebenen Massstab ist der Vektor der Kraft F_1 im Kräfteplan 3 cm lang. An dessen Ende beginnt F_2 , ebenfalls mit einer Länge von 3 cm. Zusammen bilden sie die sogenannte Belastungslinie, also die Summe aller angreifenden Kräfte. Die Verbindung vom Anfang der ersten Kraft mit dem Ende der letzten Kraft der Belastungslinie entspricht der Resultierenden R . Der Kräfteplan gibt die Richtung sowie die Grösse der Resultierenden an.



Um die Position der Resultierenden im Lageplan zu finden, werden die Wirkungslinien der angreifenden Kräfte eingezeichnet. Durch deren Schnittpunkt verläuft die Wirkungslinie der Resultierenden. Die Richtung der Resultierenden kann nun aus dem Kräfteplan parallel in den im Lageplan gefundenen Schnittpunkt verschoben werden. Die Position von R auf der Wirkungslinie ist dabei, genau wie die Länge des Vektors, frei wählbar, da im Lageplan lediglich die Lage und Richtung der Kraft, nicht aber deren Grösse grafisch festgehalten wird.

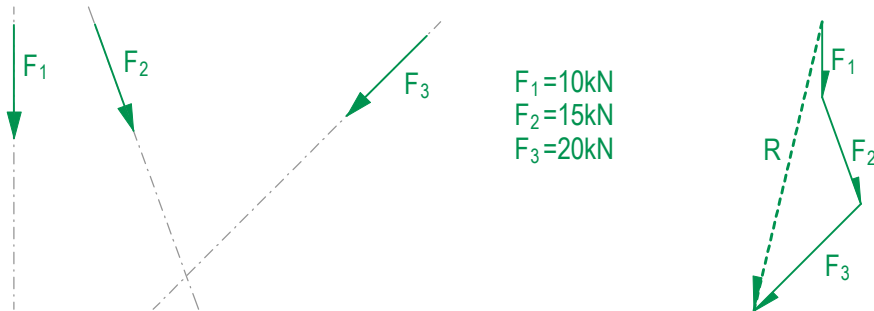


1.2

Resultierende mehrerer nicht-paralleler Kräfte

Gegeben sind drei beliebig gerichtete Kräfte. Gesucht ist die Grösse der Resultierenden sowie deren Position im Lageplan.

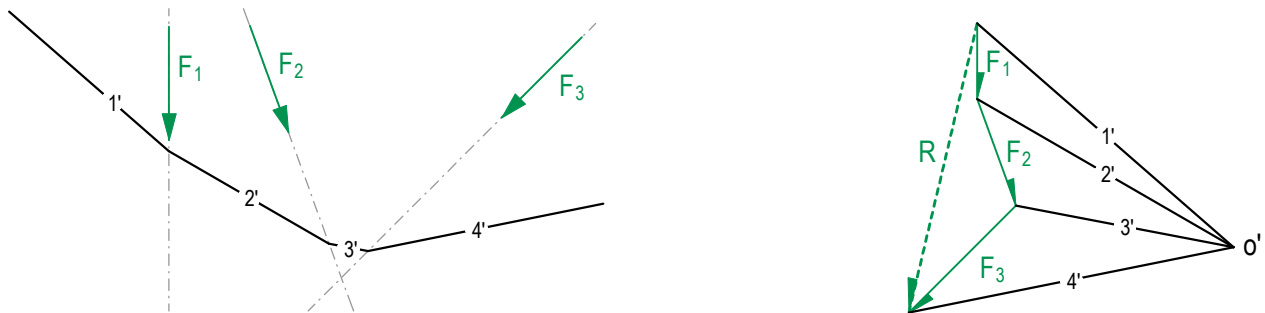
Die angreifenden Kräfte werden der Reihe nach (im Uhrzeigersinn) parallel in den Kräfteplan verschoben und dort mit Hilfe des vorgegebenen Massstabs mit der richtigen Länge aneinander gezeichnet. Das Verbinden von Anfangs- und Endpunkt der Belastungslinie ergibt die Grösse und die Richtung der Resultierenden R .



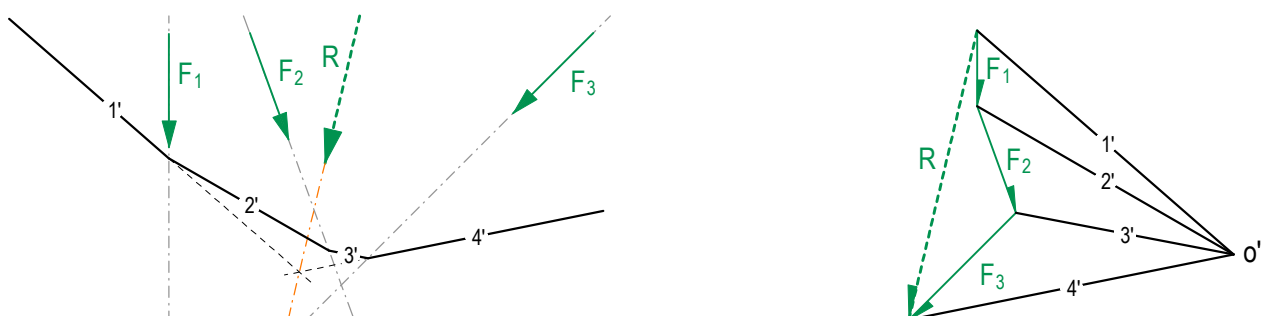
Die Position der Resultierenden im Lageplan wird mittels einer Hilfskonstruktion ermittelt. Dazu wird im Kräfteplan ein Punkt o' frei gewählt. Ausgehend von diesem sogenannten Pol wird zu den Anfangs- und Endpunkten der Kräfte F_1 bis F_3 eine Linie gezogen. Diese Linien $1' - 4'$, die sogenannten Strahlen, werden nun parallel in den Lageplan übertragen.

Da es sich beim Lage- und Kräfteplan um duale Zeichnungen handelt, entspricht jedes Polygon im Kräfteplan einem Punkt im Lageplan – und umgekehrt. Das Polygon $F_1-1'-2'$ im Kräfteplan muss also in einem Schnittpunkt zwischen der Wirkungslinie der ersten Kraft und den beiden ersten Strahlen resultieren.

Im Lageplan kann die Position von $1'$ frei gewählt werden. Im Schnittpunkt von $1'$ und F_1 wird anschliessend $2'$ angesetzt. Weiter werden die Elemente des Polygons $F_2-2'-3'$ parallel verschoben. Im Schnittpunkt von $2'$ mit F_2 wird $3'$ angesetzt. Dies wird solange fortgeführt, bis alle Strahlen in den Lageplan übertragen wurden.



Um die Lage der Resultierenden zu finden, wird das erste sowie das letzte Segment der Hilfskonstruktion ($1'$ & $4'$) verlängert bis sie sich schneiden. Die Richtung der Resultierenden kann nun aus dem Kräfteplan parallel in diesen im Lageplan gefundenen Schnittpunkt verschoben werden. Die Lage der Resultierenden bleibt dabei immer dieselbe, auch wenn ein anderer Pol o' gewählt wird.



Lagepläne 1:100

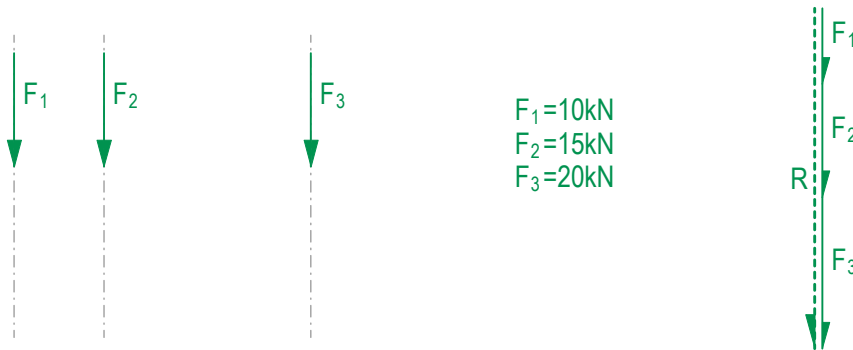
Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

1.3

Kompodium Tragwerksentwurf I&II Resultierende paralleler Kräfte

Gegeben sind drei parallele Kräfte. Gesucht ist die Grösse der Resultierenden sowie deren Position im Lageplan.

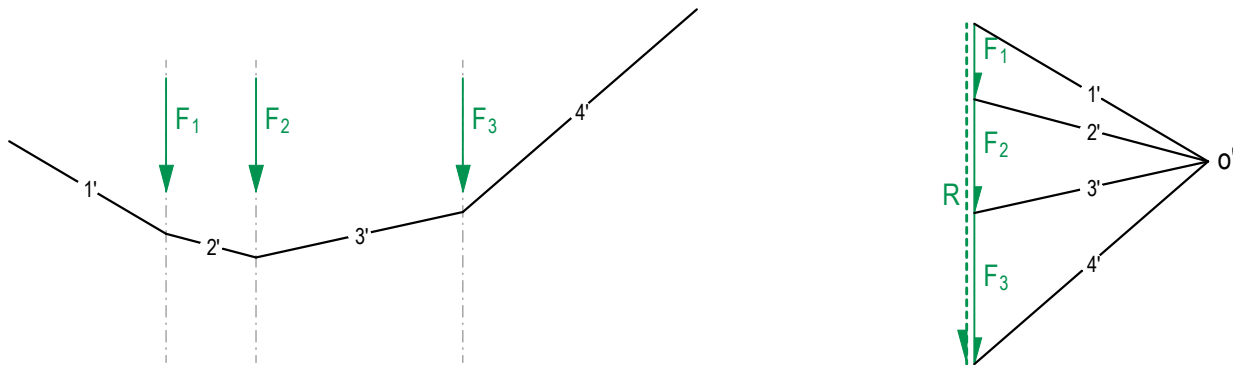
Die angreifenden Kräfte werden der Reihe nach (im Uhrzeigersinn) mit Hilfe des vorgegebenen Massstabs im Kräfteplan aufgezeichnet. Das Verbinden von Anfangs- und Endpunkt der Belastungslinie ergibt die Grösse und die Richtung der Resultierenden R .



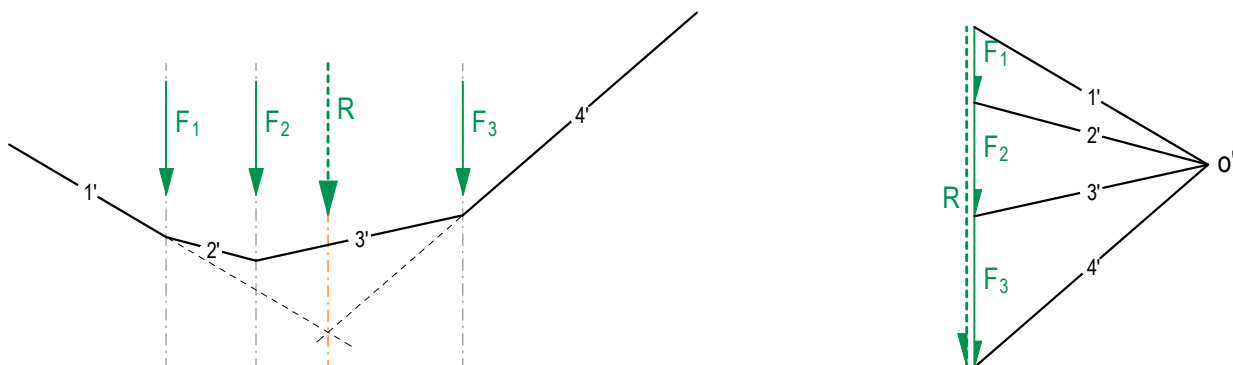
Die Position der Resultierenden im Lageplan wird mittels einer Hilfskonstruktion ermittelt. Dazu wird im Kräfteplan ein Punkt o' frei gewählt. Ausgehend von diesem sogenannten Pol wird zu den Anfangs- und Endpunkten der Kräfte F_1 bis F_3 eine Linie gezogen. Diese Linien $1' - 4'$, die sogenannten Strahlen werden nun parallel in den Lageplan übertragen.

Da es sich beim Lage- und Kräfteplan um duale Zeichnungen handelt, entspricht jedes Polygon im Kräfteplan einem Punkt im Lageplan – und umgekehrt. Das Polygon $F_1-1'-2'$ im Kräfteplan muss also in einem Schnittpunkt zwischen der Wirkungslinie der ersten Kraft und den beiden ersten Strahlen resultieren.

Die Position von $1'$ kann frei gewählt werden. Im Schnittpunkt von $1'$ und F_1 wird anschliessend $2'$ angesetzt. Weiter wird das Polygon $F_2-2'-3'$ parallel verschoben. Im Schnittpunkt von $2'$ mit F_2 wird also $3'$ angesetzt. Dies wird solange fortgeführt bis alle Strahlen in den Lageplan übertragen wurden.



Um die Lage der Resultierenden zu finden, werden das erste und letzte Segment der Hilfskonstruktion ($1'$ & $4'$) verlängert bis sie sich schneiden. Die Richtung der Resultierenden kann nun aus dem Kräfteplan parallel in diesen im Lageplan gefundenen Schnittpunkt verschoben werden. Die Lage der Resultierenden bleibt dabei immer dieselbe, auch wenn ein anderer Pol o' gewählt wird.



Lagepläne 1:100

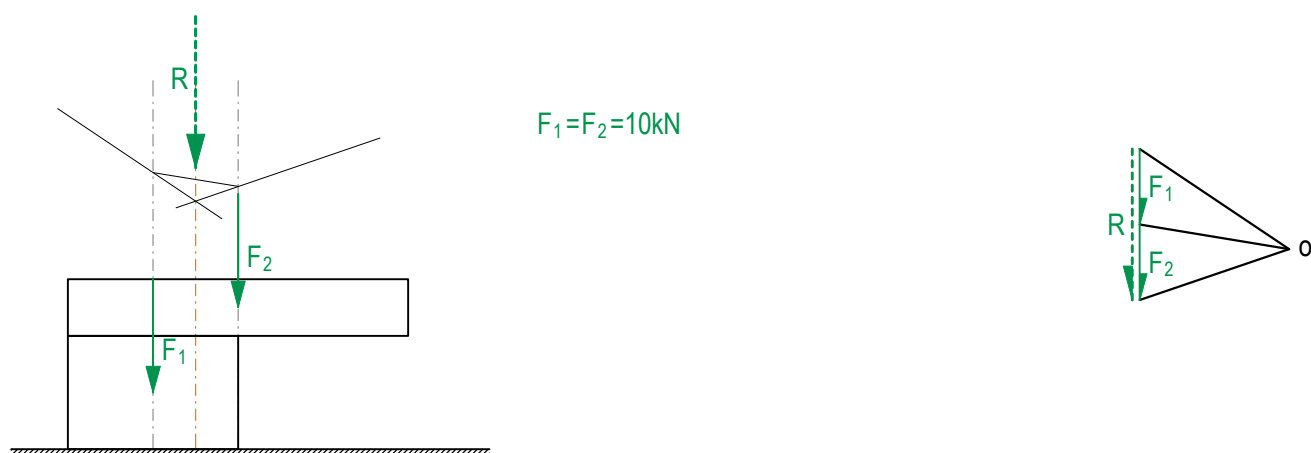
Kräftepläne $1\text{cm} \triangleq 10\text{kN}$

1.4

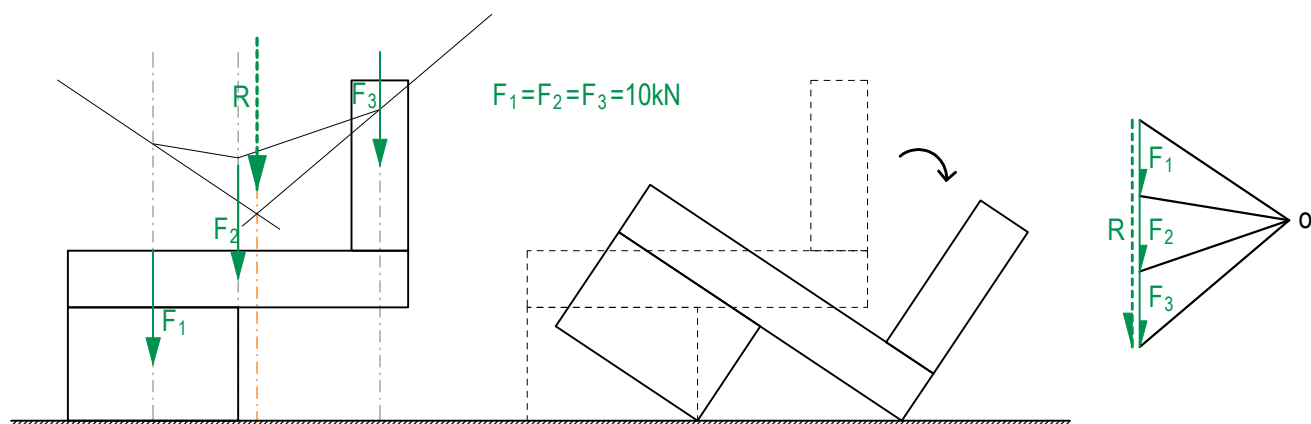
Stabilität

Gegeben sind drei Beispiele unterschiedlich gestapelter, miteinander verleimter Bausteine. Gesucht ist die Position der Resultierenden im Lageplan, um so beurteilen zu können, ob die Anordnung der Bausteine stabil ist.

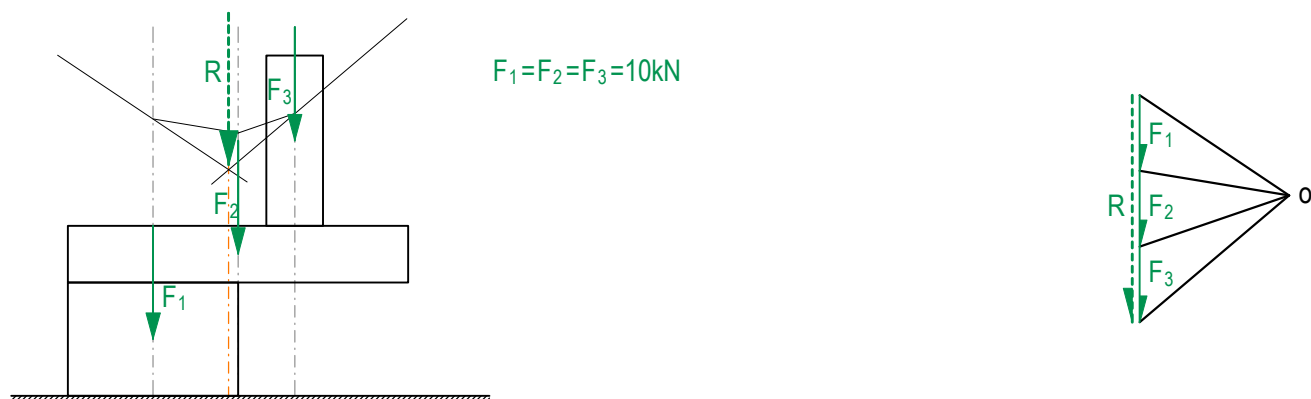
Mittels einer Hilfskonstruktion wird die Lage der Resultierenden ermittelt. Da die Wirkungslinie der Resultierenden innerhalb des untersten Bausteins liegt, ist die Konstruktion stabil.



Im zweiten Beispiel wird die Lage der Resultierenden wiederum mit Hilfe einer Hilfskonstruktion ermittelt. Die Wirkungslinie der Resultierenden liegt in diesem Fall ausserhalb des unteren Bausteins, weshalb die Konstruktion nach rechts umkippt.



Das vorhergehende Beispiel kann stabilisiert werden, indem der oberste Baustein so lange nach links verschoben wird, bis die Wirkungslinie der Resultierenden wieder innerhalb des untersten Bausteins zu liegen kommt.

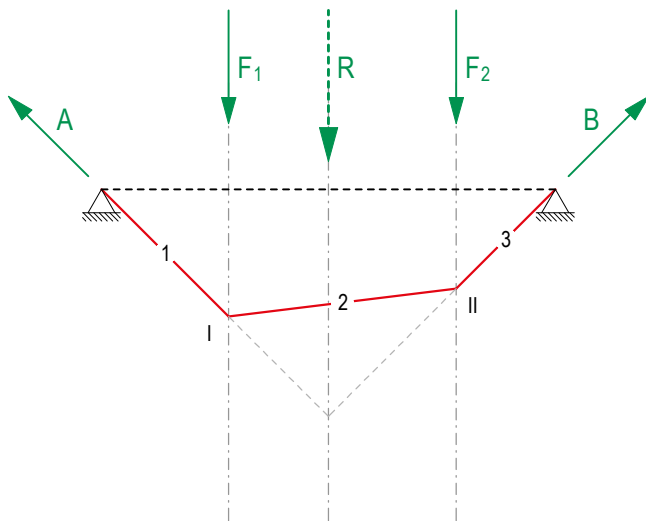


Lagepläne 1:100

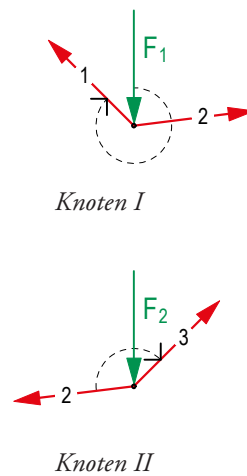
Kräftepläne $1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ kN}$

2.1

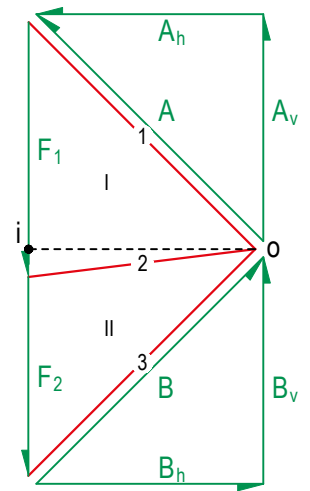
In der graphischen Statik werden die Kräfte eines Tragwerks als Vektoren in zwei Plänen dargestellt, dem Lageplan und dem Kräfteplan. Der Lageplan zeigt die Geometrie des Tragwerks mit allen Tragelementen und der Lage der Lasten. Die an und in den Tragelementen herrschenden Kräfte werden im Kräfteplan dargestellt. Jeder Linie im Lageplan entspricht eine parallele Linie im Kräfteplan. Die Subsysteme dienen als Skizzen und zeigen Informationen bezüglich der einzelnen Knoten.



Lageplan 1:100



Subsystem
(kein Mst.)

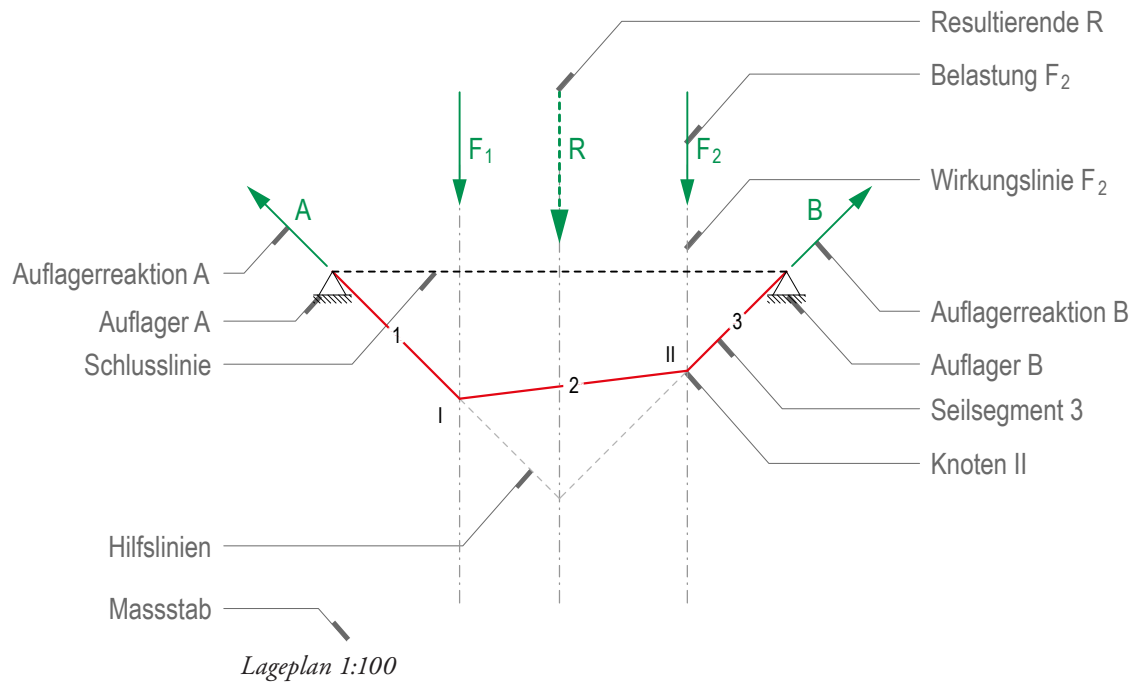


Kräfteplan 1cm $\hat{=}$ 10kN

2.1

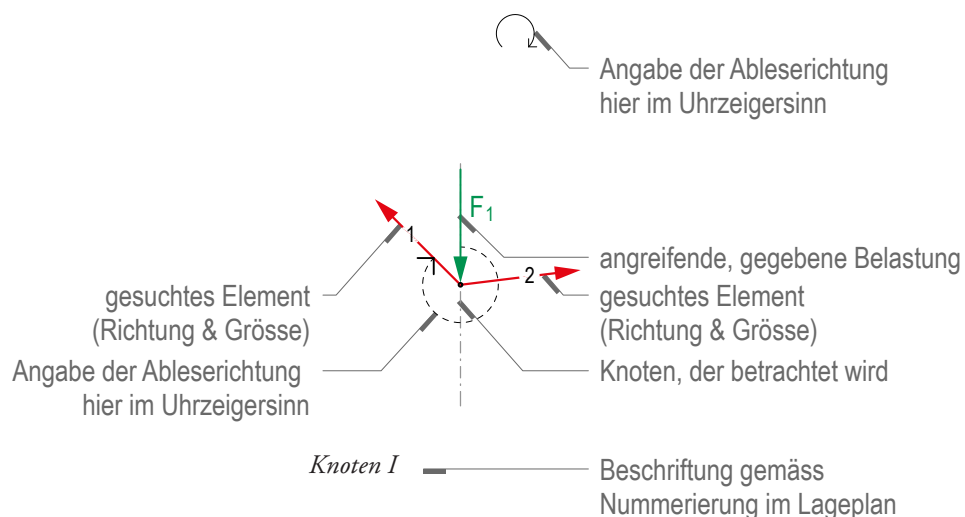
Lageplan

Der Lageplan zeigt die Geometrie des Tragwerks mit allen Tragelementen und der Lage der Lasten. Belastungen (F_1 , F_2) und Auflagerkräfte (A, B) werden „Äussere Kräfte“ genannt und mit ihrer Richtung (als Pfeil) gezeichnet. Sie haben die Farbe grün. Kräfte in den Tragwerkselementen (Segmente 1-3) werden als innere Kräfte bezeichnet und weisen keine eindeutige Richtung auf. Sie werden der Art der Beanspruchung entsprechend rot für Zug und blau für Druck gefärbt. Der Lageplan wird in einem bestimmten Massstab gezeichnet. Bsp: 1:100 heisst, 1 cm im Plan entspricht 100 cm in Realität.



Subsystem

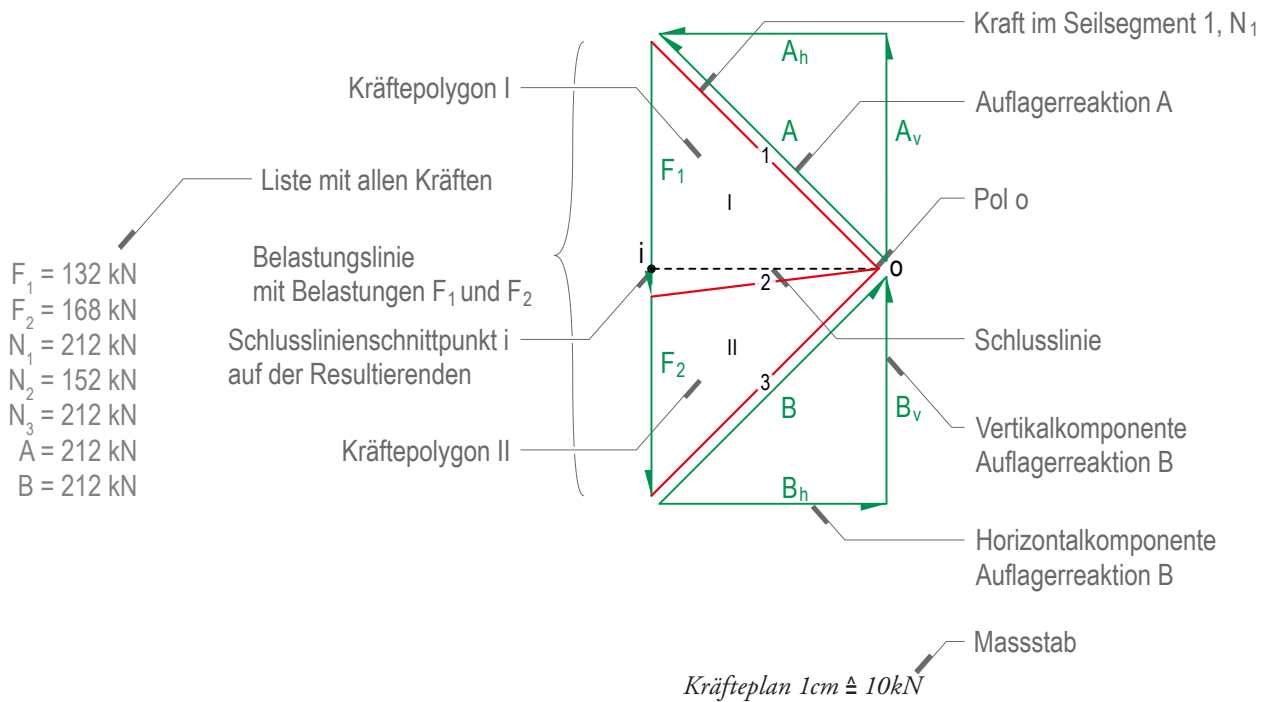
Das Subsystem und die darin deklarierte Ableserichtung geben beim Konstruieren des Kräfteplans die Reihenfolge der zu zeichnenden Elemente an. Das Subsystem wird ohne Massstab, meist als Skizze dargestellt. Im Subsystem werden die auf den Knoten einwirkenden Kräfte / Elemente gezeichnet und es wird zwischen gegebenen und gesuchten Elementen unterschieden. Mit dem Subsystem und den darin enthaltenen Krafrichtungen kann bestimmt werden, ob das Tragwerkselement auf Zug oder Druck belastet ist. Zeigt die Kraft auf den Knoten, ist es eine Druckkraft (blau). Zeigt sie vom Knoten weg, ist es eine Zugkraft (rot).



2.1

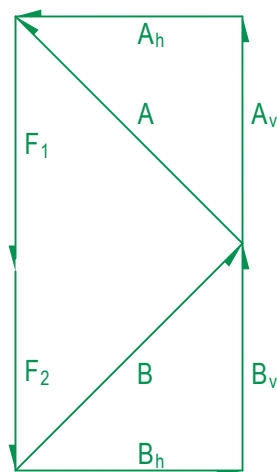
Kräfteplan

Der Kräfteplan wird durch paralleles Verschieben der Tragwerkselemente aus dem Lageplan konstruiert. Die gewählte Ableserichtung und das zugehörige Subsystem geben dabei die Reihenfolge der zu zeichnenden Elemente an. Aus dem kompletten Kräfteplan können anschliessend, mithilfe des gewählten Massstabes, die Grössen der Kräfte direkt heraus gemessen werden. 1cm $\hat{=}$ 50kN heisst, 1cm im Plan entspricht einer Kraft von 50kN.

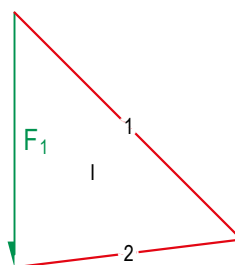


Globales und lokales Gleichgewicht

Die Belastungslinie ist das Kräftepolygon aller äusseren Kräfte (Einwirkungen und Auflagerkräfte). Ist das Polygon geschlossen, befindet sich das Gesamtsystem im Gleichgewicht (globales Gleichgewicht). Betrachtet man einen Knoten isoliert (Subsystem), so ist dieser im Gleichgewicht, wenn alle am Knoten angreifenden Kräfte im Kräfteplan ein geschlossenes Polygon bilden. Das Kräftepolygon wird als Modell des lokalen Gleichgewichts der inneren Kräfte bezeichnet.



Globales Gleichgewicht



Lokales Gleichgewicht Knoten I

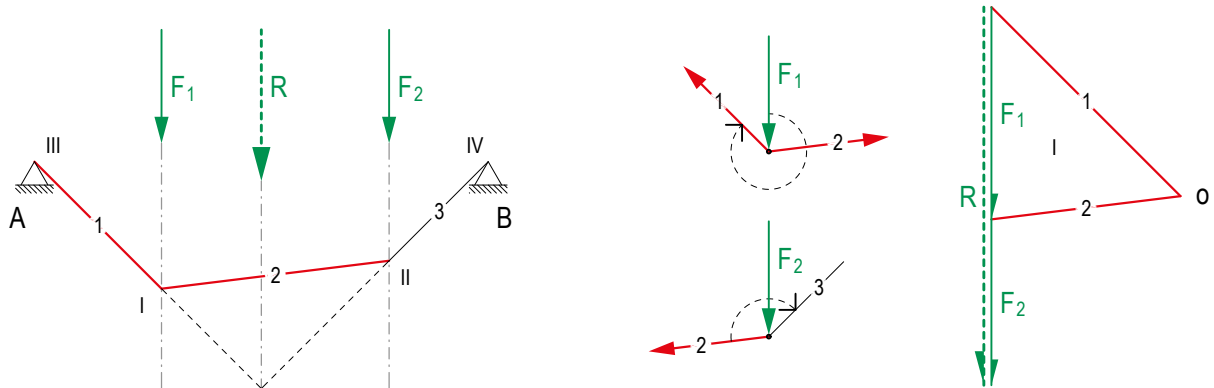
2.2

Kompodium Tragwerksentwurf I&II

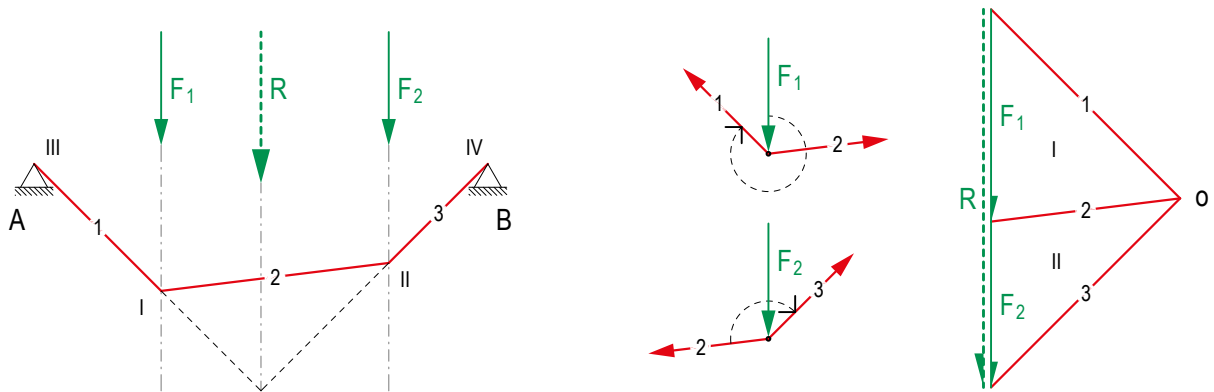
Form gegeben: Schritt für Schritt

Gegeben ist die Form einer Struktur zwischen zwei Auflagern A und B. Die beiden angreifenden Punktlasten F_1 und F_2 teilen das Seil in drei Segmente, da sich immer dort, wo eine Kraft einwirkt, eine Richtungsänderung ergibt. Gesucht sind die inneren Kräfte im Seil, sowie die beiden Auflagerkräfte.

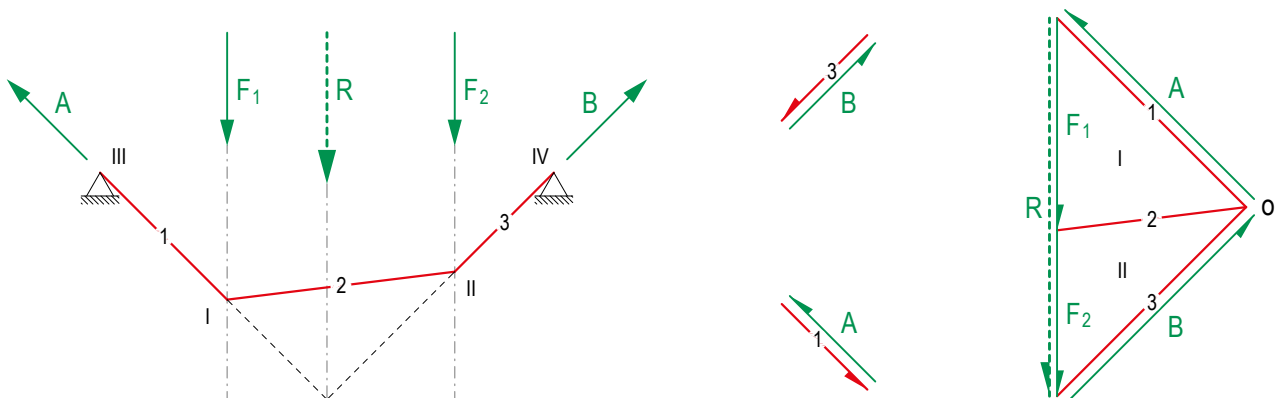
Die Elemente im Knoten I werden, beginnend bei der ersten bekannten Kraft, im Uhrzeigersinn in den Kräfteplan übertragen. Grösse und Richtung von F_1 sind bekannt. Am Ende von F_1 wird das erste unbekannte Element (2) angesetzt. Da die genaue Länge dieses Elements noch unbekannt ist, wird das zweite und letzte Element (1) an den Anfang von F_1 gesetzt. So entsteht ein Schnittpunkt zwischen 1 und 2. Zusammen mit F_1 bilden 1 und 2 nun das Kräftepolygon des Knotens I. Mit Hilfe der durch F_1 vorgegebenen Richtung im Kräftepolygon I kann nun auch überprüft werden, ob es sich bei 1 und 2 um Druck- oder Zuelemente handelt.



Auch im Knoten II wird bei der ersten bekannten Kraft begonnen; in diesem Fall wäre dies Element 2. Dabei handelt es sich um eine Zugkraft, die immer weg vom Knoten wirkt und daher hier die Richtung nach links vorgibt. Am Ende von 2 wird F_2 angehängt. Das letzte unbekannte Element des Knotens (3) schliesst das Kräftepolygon II.



Knoten III und IV werden für die Auflagerkräfte benötigt. Im Knoten III wirken nur das Element 1 und die Auflagerkraft A. 1 ist ein Zuelement und A wirkt dementsprechend in die entgegengesetzte Richtung. Die Grösse der beiden Kräfte ist dieselbe. Analog dazu verhält es sich im Knoten IV mit Element 3 und der Auflagerkraft B.



Lagepläne 1:100

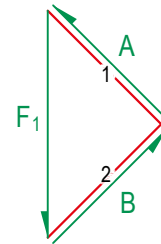
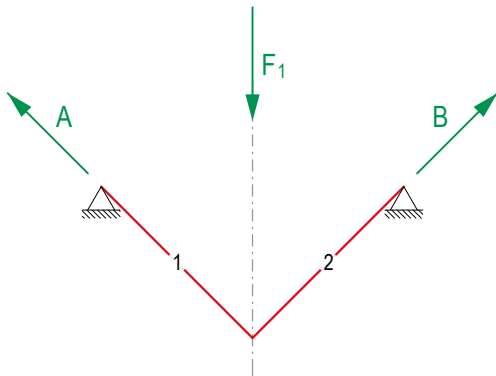
Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

2.3

Form gegeben

Ist die Form des Tragwerks gegeben, folgen die Kräfte der Form.

Nachdem alle angreifenden Kräfte als Belastungslinie im Kräfteplan festgehalten wurden, beginnt das Übertragen der einzelnen Elemente in den Knoten. Es können dabei jeweils nur Knoten mit zwei oder weniger unbekannten Elementen gelöst werden. Beginnend bei der ersten bekannten Kraft werden die Elemente des Knotens der Reihe nach (im Uhrzeigersinn) in den Kräfteplan übertragen. Knoten für Knoten wird so der Kräfteplan vervollständigt, bis alle Elemente des Tragwerks sowie die Auflagerkräfte mindestens einmal aufgezeichnet sind.

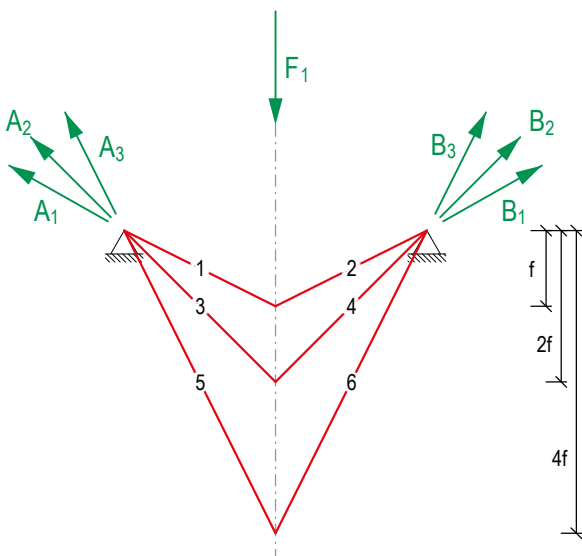


Form gesucht

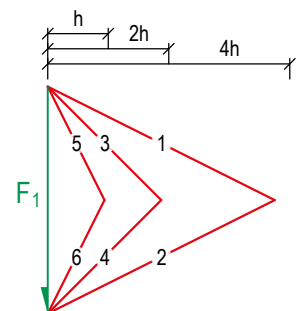
Oftmals muss die Form des Tragwerks erst entworfen werden. In diesem Fall folgt die Form der Kraft.

Zuerst wird dabei die Belastungslinie aufgezeichnet. Im unteren Beispiel entspricht die angreifende Kraft auch gleich der Resultierenden. Auf deren Wirkungslinie kann nun die Höhe des Tragwerks, die sogenannte Stichhöhe, frei gewählt werden. Das Beispiel zeigt drei von unendlich vielen möglichen Seiltragwerken mit variierender Stichhöhe.

Die statische Höhe des Tragwerks steht dabei in Relation zur Grösse der Horizontalkomponente der inneren Kräfte. Je steiler ein Tragwerk, desto kleiner fallen die inneren Kräfte aus. Bei Verdoppelung der Stichhöhe halbiert sich die Horizontalkomponente der inneren Kräfte, und damit ebenso der horizontale Schub der Auflagerkräfte.



$$f = \frac{1}{h}$$



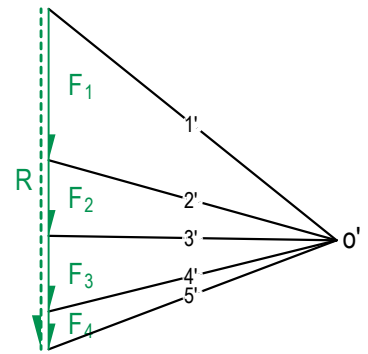
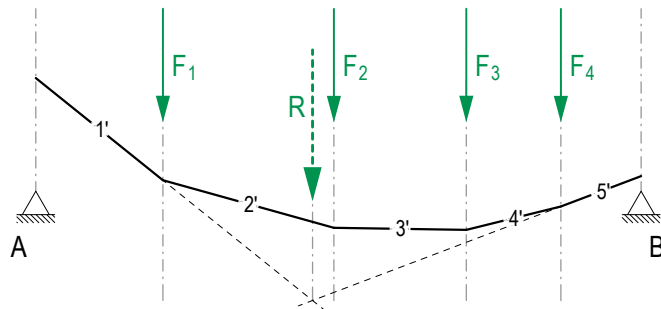
2.4

Kompodium Tragwerksentwurf I&II Form gesucht: Schritt für Schritt

Gegeben sind vier ungleichmässig verteilte Punktlasten sowie die beiden Auflager A und B. Gesucht ist eines von vielen möglichen Tragwerken, das unter der gegebenen Belastung im Gleichgewicht ist.

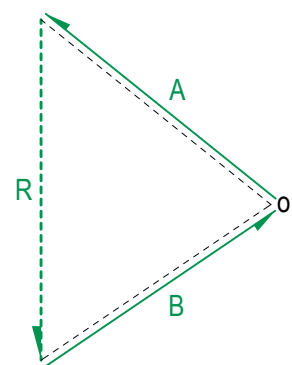
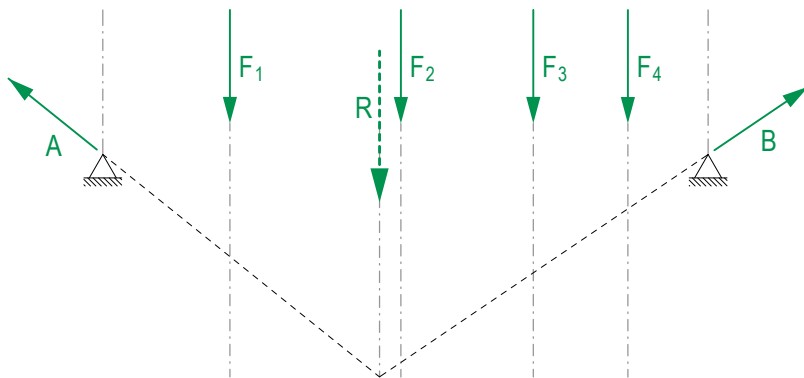
1. Resultierende

Nach dem Aufzeichnen der Belastungslinie wird mittels einer Hilfskonstruktion die Position der Resultierenden im Lageplan gefunden.



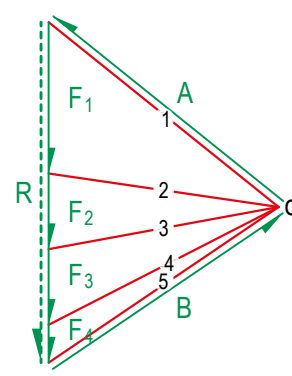
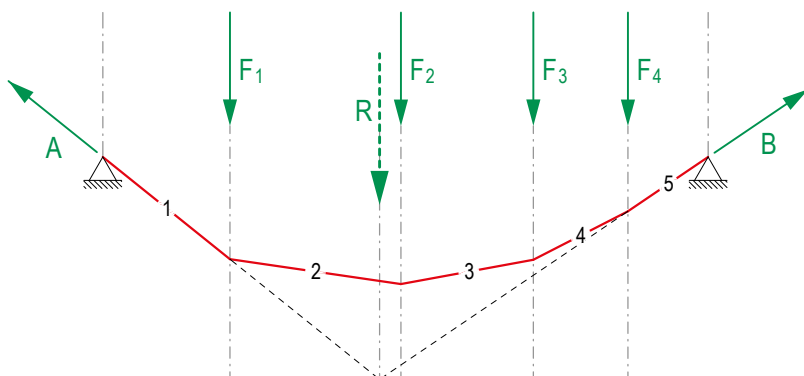
2. Globales Gleichgewicht

Nun wird ein Punkt auf der Wirkungslinie der Resultierenden fixiert, von welchem zwei Stützlinien in die Auflager verlaufen. Der so entstandene Knoten illustriert das globale Gleichgewicht, also das Gleichgewicht zwischen der Resultierenden und den Auflagerkräften.



3. Lokales Gleichgewicht

Ausgehend vom Pol o können nun die Strahlen im Kräfteplan eingezeichnet und der Reihe nach in den Lageplan übertragen werden.



Lagepläne 1:100

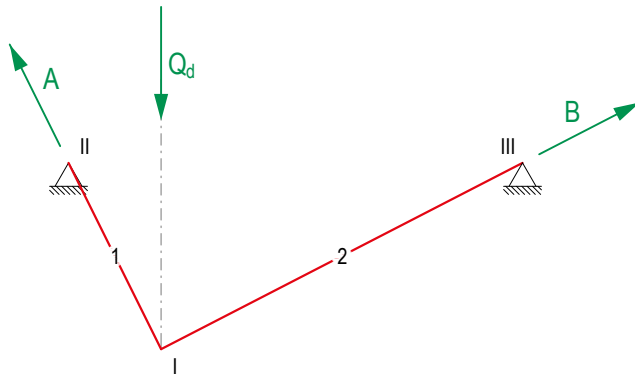
Kräftepläne 1cm $\hat{=}$ 10kN

2.5

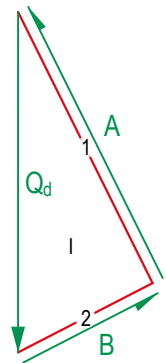
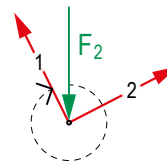
Kompodium Tragwerksentwurf I&II Dimensionieren

Gegeben ist der Lageplan eines hängenden Seils aus Stahl S235 unter einer angehängten veränderlichen Punktlast $Q_k = 30 \text{ kN}$. Gesucht ist der benötigte Durchmesser dieses Seils.

Zuerst muss der charakteristische Wert (Q_k) der angreifenden Kraft Q auf Bemessungsniveau (Q_d) gebracht werden. Dies wird mit der Multiplikation mit dem Sicherheitsfaktor erreicht. Da die Grösse einer Belastung über die Lebensdauer eines Tragwerks nicht immer genau vorhergesagt werden kann, wird zu jeder Belastung ein Sicherheitsfaktor γ eingerechnet. Für ständige Lasten beträgt der Sicherheitsfaktor $\gamma_G = 1.35$, für veränderliche Lasten $\gamma_Q = 1.5$. Mit der gefundenen Kraft Q_d kann nun der Kräfteplan gezeichnet werden.



$$\begin{aligned} Q_d &= Q_k \cdot \gamma_Q \\ &= 30 \text{ kN} \cdot 1.5 \\ &= \underline{45 \text{ kN}} \end{aligned}$$



Um den Seildurchmesser zu berechnen, wird die massgebende Kraft N_{dmax} im Tragwerk ermittelt. Als massgebende Kraft versteht sich die grösste innere Kraft. In diesem Fall ist dies Element 1 mit einer Länge von 4 cm, und daher einer Grösse von 40 kN.

$$\begin{aligned} N_1 &= 40 \text{ kN} = N_{dmax} \\ N_2 &= 20 \text{ kN} \\ A &= 40 \text{ kN} \\ B &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Wird die massgebende Kraft N_{dmax} durch die Materialfestigkeit f_d geteilt, so ergibt sich die benötigte Querschnittsfläche A_{req} .

$$A_{req} = N_d / f_{td}$$

Die Festigkeit des gegebenen Materials kann der Formelsammlung entnommen werden. Da es sich bei 1 um ein Zuelement handelt, ist die Zugfestigkeit f_{tk} relevant. Auch bei den Werten der Materialfestigkeit wird ein Sicherheitsbeiwert γ_M eingerechnet, um Fehler im Material zu berücksichtigen. Im Unterschied zum Sicherheitsfaktor der Belastung, wird f_{tk} aber durch γ_M dividiert. γ_M ist material-spezifisch und daher ebenfalls der Formelsammlung zu entnehmen.

$$\begin{aligned} f_{td} &= f_{tk} / \gamma_M \\ &= 235 \text{ N/mm}^2 / 1.05 = 223.81 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{req} &= N_d / f_{td} \\ &= 40 \text{ kN} / 223.81 \text{ N/mm}^2 = 178.7 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Zuletzt wird der Durchmesser mit Hilfe der Formel für die Kreisfläche gefunden. Wichtig: Das Resultat wird immer aufgerundet, da ein Abrunden den Minstdurchmesser unterschreiten würde.

$$\begin{aligned} A &= r^2 \cdot \pi = (D/2)^2 \cdot \pi \\ D &= 2 \cdot \sqrt{A/\pi} \\ &= 2 \cdot \sqrt{178.7 \text{ mm}^2 / \pi} = 15.08 \text{ mm} \approx \underline{16 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Tragsicherheitsnachweis

Gegeben ist ein Seilquerschnitt aus Stahl S355 mit einem Durchmesser $D=20\text{mm}$ unter einer massgebenden Zugkraft $N_d = 80\text{kN}$. Gesucht ist der Nachweis, ob der Querschnitt des Seils der gegebenen Belastung standhält.

Zuerst wird die maximal erlaubte Kraft N_{allow} des Seils errechnet. Diese ergibt sich aus der Multiplikation mit der Zugfestigkeit f_{td} und der effektiven Querschnittsfläche A_{ef} anhand des angegebenen Durchmessers des Seils.

Die gefundene Kraft N_{allow} wird dann mit der tatsächlich wirkenden Kraft N_d verglichen. Ist N_{allow} gleich gross oder grösser als N_d , so ist der Nachweis erbracht und der gegebene Querschnitt hält der angreifenden Belastung stand. Für den Fall, dass der Nachweis nicht erfüllt ist, muss das Seil neu dimensioniert werden.

$$N_d \leq N_{allow} = f_{td} \cdot A_{ef}$$

$$\begin{aligned} A_{ef} &= r^2 \cdot \pi = (D/2)^2 \cdot \pi \\ &= (20 \text{ mm}/2)^2 \cdot \pi = 314.16 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{allow} &= f_{td} \cdot A_{ef} \\ N_{allow} &= 338.1 \text{ N/mm}^2 \cdot 314.16 \text{ mm}^2 = \underline{106.2 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$N_d = 80 \text{ kN}$$

$$N_d \leq N_{allow}$$

2.6

Kompendium Tragwerksentwurf I&II Formelblatt

Bemessungsformeln / Dimensioning Formulas

Belastungsart / Nature of force	Bemessen / Dimension	Tragsicherheitsnachweis / Proof
Zug / Tension	$A_{\text{req}} = \frac{N_d}{f_{\text{td}}} \quad [\text{mm}^2]$	$N_d \leq N_{\text{allow}} = f_{\text{td}} \cdot A_{\text{ef}} \quad [\text{N}]$
Druck / Compression (Materialversagen / Material failure)	$A_{\text{req}} = \frac{N_d}{f_{\text{cd}}} \quad [\text{mm}^2]$	$N_d \leq N_{\text{allow}} = f_{\text{cd}} \cdot A_{\text{ef}} \quad [\text{N}]$

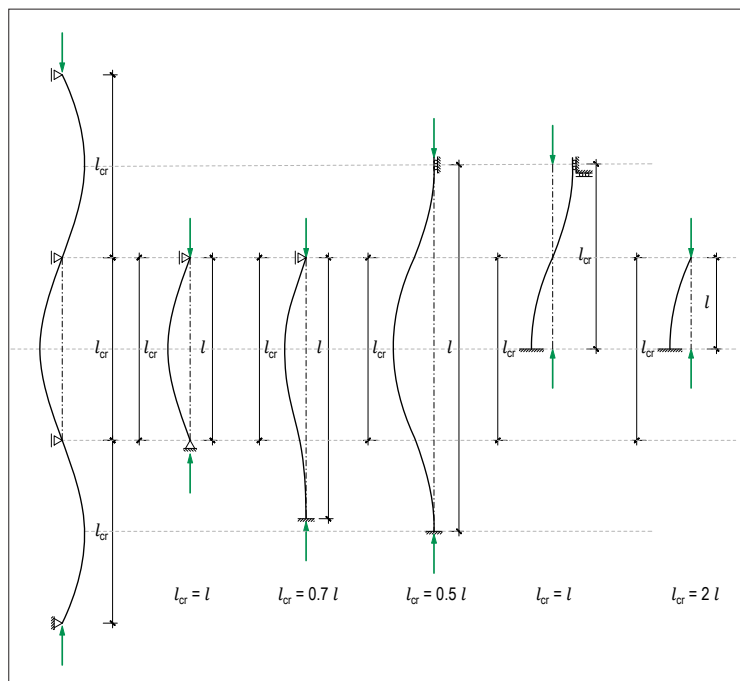
Tragfähigkeitsformeln / Formulas of load-bearing capacity

Bemessungswert der Zugfestigkeit Design value allowable tensile stress	$f_{\text{td}} = f_{\text{tk}} / \gamma_M$	$[\text{N}/\text{mm}^2]$
Bemessungswert der Druckfestigkeit Design value allowable compressive stress	$f_{\text{cd}} = f_{\text{ck}} / \gamma_M$	$[\text{N}/\text{mm}^2]$
Bemessungswert der Kraft Design value of force	$F_d = F_k \cdot \gamma$	$[\text{kN}]$

Sicherheitsfaktoren für Lasten / Safety factors for loads

Ständige Lasten/ Dead load	$\gamma_G = 1.35$
Veränderliche Lasten/ Live load	$\gamma_Q = 1.5$

Kritische Knicklänge / Critical buckling length



Querschnittswerte / Section properties

Rechteck/ Rectangular		$A = b \cdot h \quad [\text{mm}^2]$
Kreis/ Circle		$A = r^2 \cdot \pi \quad [\text{mm}^2]$
Kreisring/ Circular ring		$A = (R^2 - r^2) \cdot \pi \quad [\text{mm}^2]$

2.6

Kompodium Tragwerksentwurf I&II Formelblatt

Legende / Legend

Kräfte (innere und äussere) / Forces

N	Normalkraft / Axial force	[kN]
V	Querkraft / Shear force	[kN]

Lasten / Loads

F	Punktlast allgemein / Point load general	[kN]
G	Einzellast, ständig / Dead point load	[kN]
Q	Einzellast, veränderlich / Live point load	[kN]
s	Linienlast allgemein / Line load general	[kN/m]
\bar{s}	Flächenlast allgemein / Area load general	[kN/m ²]
g	Linienlast ständig / Dead line load	[kN/m]
q	Linienlast veränderlich / Live line load	[kN/m]
\bar{g}	Flächenlast ständig / Dead area load	[kN/m ²]
\bar{q}	Flächenlast veränderlich / Live area load	[kN/m ²]

Geometrie / Geometry

A	Querschnittsfläche / Cross-sectional area	[mm ²]
l	Länge / Length	[mm]
r	Radius / Radius	[mm]
d	Durchmesser / Diameter	[mm]
t	Dicke / Thickness	[mm]
b	Breite / Width	[mm]
h	Höhe / Height	[mm]
Δl	Längenänderung / Length variation	[mm]

Index / Indices

k	Charakteristischer Wert / Characteristic value
d	Wert auf Bemessungsniveau / Design value
q	veränderliche Last / Live load
g	ständige Last / Dead load
allow	Zulässige ... / Allowable ...
cr	Kritische Knicklast / Critical buckling load
req	erforderliche ... / Required ...
eff	effektive ... / Effective ...
t	Zug ... / Tension ...
c	Druck ... / Compression ...

Materialkennwerte / Material properties

Holz Timber	Zugfestigkeit f_{tk} Allowable tensile stress f_{tk} [N/mm ²]	Druckfestigkeit f_{tk} Allowable compressive stress f_{tk} [N/mm ²]	Raumlast γ_k Material density γ_k [kN/m ³]	Widerstandsbeiwert γ_M Material safety factor γ_M
Fichte Spruce	14	20	4.5	1.7
Buche Beech	24	26	6.5	
Eiche Oak	26	26	7.5	
BSH Glulam	18	22	5	

Stahl Steel	Zugfestigkeit f_{tk} Allowable tensile stress f_{tk} [N/mm ²]	Druckfestigkeit f_{tk} Allowable compressive stress f_{tk} [N/mm ²]	Raumlast γ_k Material density γ_k [kN/m ³]	Widerstandsbeiwert γ_M Material safety factor γ_M
S 235	235	235	80.0	1.05
S 355	355	355		
S 500	500	500		

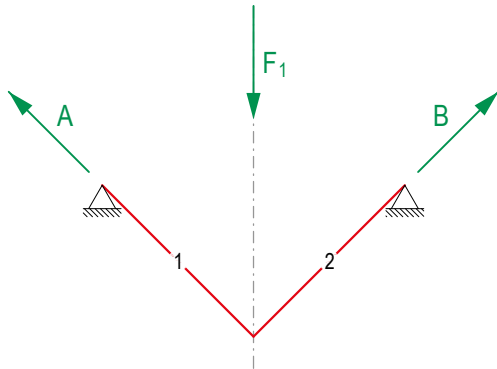
Beton Concrete	Zugfestigkeit f_{tk} (unbewehrt) Allowable tensile stress f_{tk} (unreinforced) [N/mm ²]	Druckfestigkeit f_{tk} Allowable compressive stress f_{tk} [N/mm ²]	Raumlast γ_k Material density γ_k [kN/m ³]	Widerstandsbeiwert γ_M Material safety factor γ_M
C 12/15	1.1	12	25	1.5
C20/25	1.5	20		
C35/45	2.2	35		
C55/65	2.9	55		

f	Materialfestigkeit / Resistance of materials
γ_k	Raumlast / Material density
γ_M	Widerstandsbeiwert / Material safety factor

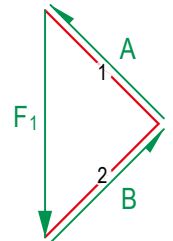
3.1

Von der Punktlast zur gleichmässig verteilten Last

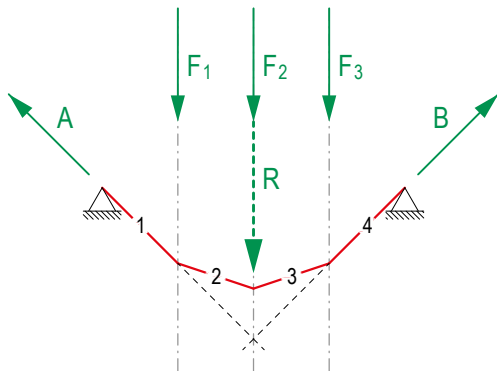
Eine angreifende Kraft bewirkt eine Richtungsänderung im Tragwerk. Daher entsteht im unteren Beispiel ein Knoten mit der angreifenden Kraft F_1 und den beiden Seilsegmenten 1 und 2.



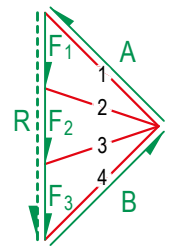
$$F_1 = 30 \text{ kN}$$



Unter drei angreifenden Kräften stellt sich ein Seil mit vier Segmenten ein. Immer dort, wo die angreifenden Kräfte auf das Tragwerk wirken, gibt es eine Richtungsänderung.



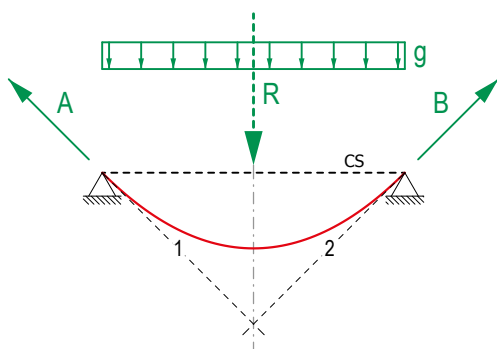
$$\begin{aligned} F_1 &= 10 \text{ kN} \\ F_2 &= 10 \text{ kN} \\ F_3 &= 10 \text{ kN} \end{aligned}$$



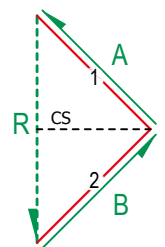
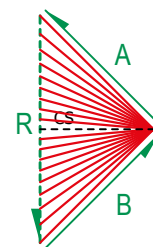
Wirken nun unendlich viele Punktlasten auf das System, so wird dies *verteilte Last*, oder *Linienlast* genannt. Die angreifende Linienlast bedeutet eine kontinuierliche Krafteinwirkung über eine bestimmte Länge und bewirkt damit eine kontinuierliche Richtungsänderung im Tragwerk. Unter einer verteilten Last stellt sich daher eine Kurve (Parabel) ein.

Um die Resultierende einer Linienlast zu finden, wird deren Wert [kN/m] mit ihrer Länge [m] multipliziert. Wurde die Grösse der Resultierenden berechnet, kann sie wie gewohnt im Kräfteplan aufgezeichnet werden. Im Lageplan liegt sie jeweils in der Mitte der angreifenden Linienlast.

Da jede Richtungsänderung zu einem zusätzlichen Stab im Kräfteplan führt, müsste es bei einer Parabel eine unendliche Anzahl an Stäben geben. Zur Vereinfachung werden nur die äussersten Segmente, also die Tangenten bei den Auflagern in den Kräfteplan übertragen, da dort die innere Kraft am grössten ist.



$$\begin{aligned} g &= 7.5 \text{ kN/m} \\ R &= 7.5 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} \\ &= 30 \text{ kN} \end{aligned}$$



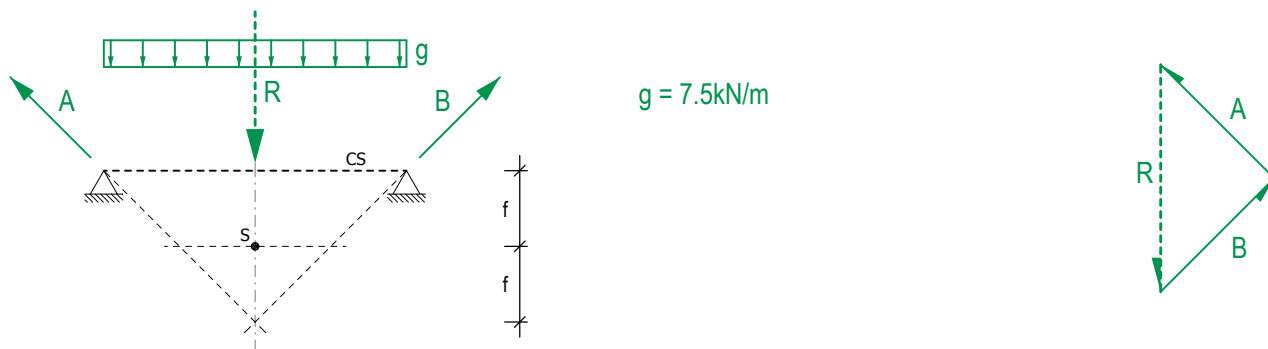
Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm $\hat{=}$ 10kN

3.2

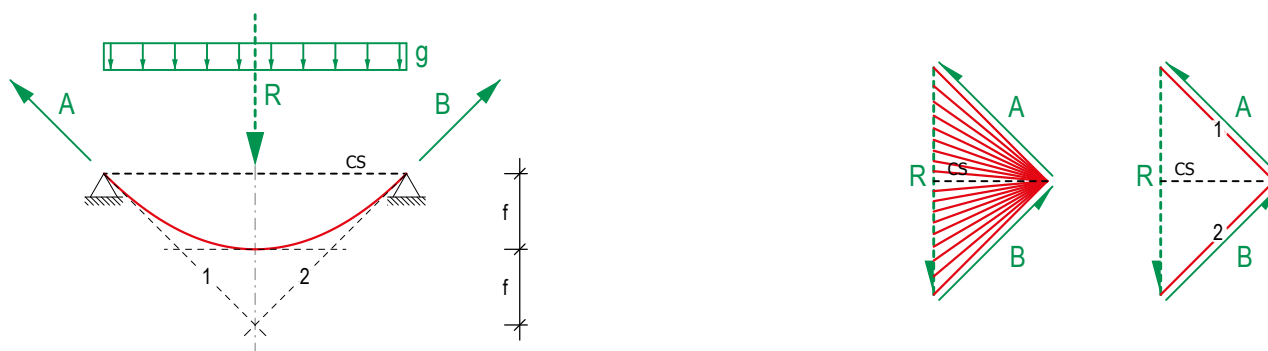
Unter einer gleichmässig verteilten Last stellt sich eine Parabel ein. Diese wird wie folgt konstruiert:

Zuerst wird die Resultierende berechnet und das globale Gleichgewicht im Kräfteplan eingezeichnet. Dann werden die äussersten Tangenten an die Kurve ermittelt; ihre Grösse und ihre Neigung entspricht den Auflagerkräften. Beide Elemente schneiden sich auf der Wirkungslinie der Resultierenden. Der Abstand vom Tangentenschnittpunkt zur Verbindung der beiden Auflager (sogenannte Schlusslinie) entspricht der doppelten Stichhöhe f der Parabel. Als dritte Tangente an die Kurve wird die Schlusslinie parallel durch den Scheitelpunkt S der Parabel verschoben.

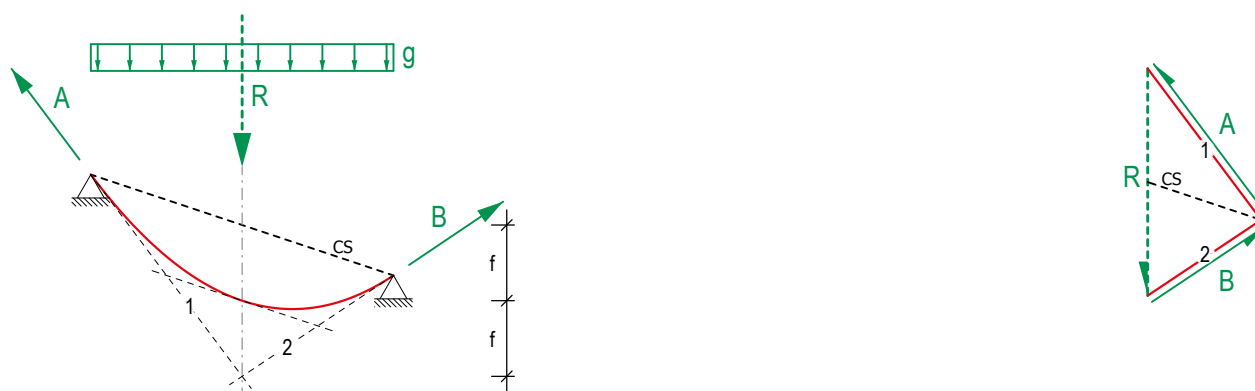


Mit Hilfe der drei Tangenten kann die Kurve von Hand in den Lageplan eingezeichnet werden.

Im Kräfteplan werden nur die Tangenten aufgezeichnet, da die Kräfte im Tragwerk direkt bei den Auflagern am grössten sind.



Bei einer asymmetrischen Anordnung der Auflager wird wiederum die Resultierende berechnet und das globale Gleichgewicht im Kräfteplan eingezeichnet. Wichtig ist dabei, dass die Schlusslinie entlang der Wirkungslinie der Resultierenden bis zum Scheitelpunkt der Parabel parallel verschoben wird. Dann kann die Kurve wiederum mit Hilfe der drei Tangenten von Hand in den Lageplan eingezeichnet werden.



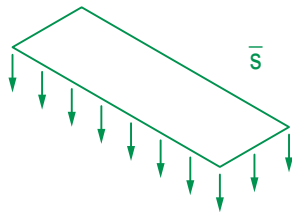
Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

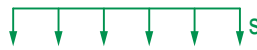
3.3

Wir unterscheiden drei verschiedene Lastarten: die Punktlast, die Linienlast und die Flächenlast. Um anhand der Bezeichnung zu erkennen, um welche Art der Belastung es sich handelt, werden Punktlasten mit Grossbuchstaben, Linienlasten mit Kleinbuchstaben und Flächenlasten mit Kleinbuchstaben mit Überstrich angegeben.

Flächenlast \bar{s}
Einheit: [kN/m²]



Linienlast s
Einheit: [kN/m]



Punktlast F
Einheit: [kN]



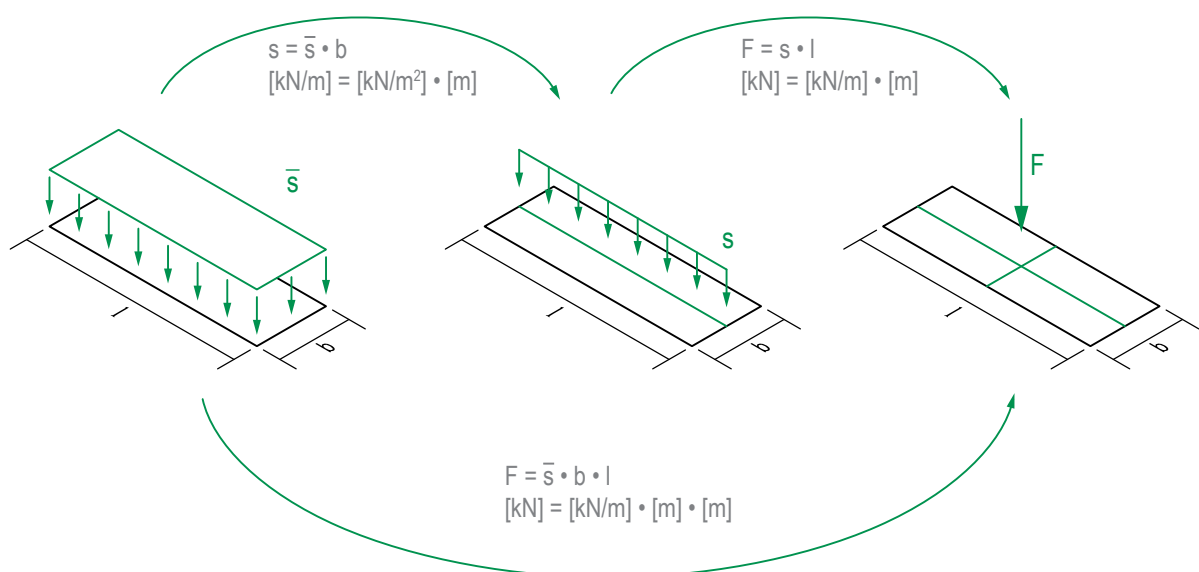
Umrechnung verschiedener Lastarten

Die meisten Kräfte ergeben sich aus Flächenlasten, wie beispielsweise dem Gewicht einer Dachdeckung oder einer Schneeschicht, welche über die gesamte Fläche eines Systems auf die vertikal abtragenden Bauteile wirken. Soll nun die gleichmässig verteilte Last auf ein lineares Bauteil der Konstruktion ermittelt werden, so wird die Flächenlast mit der Breite der Lasteinflusszone multipliziert. Daraus ergibt sich die Einheit kN/m, also die Kraft pro Laufmeter auf dem spezifisch betrachteten länglichen Bauteil.

Diese Situation kann weiter abstrahiert werden, indem mit der Länge der Lasteinflusszone, also der Länge des Bauteils multipliziert wird. Das Ergebnis ist eine resultierende Punktlast, welche mittig über dem Bauteil angreift.

Um aus einer Flächenlast \bar{s} eine Linienlast s entlang der Länge l zu erhalten, wird \bar{s} mit der Breite b multipliziert.

Um aus einer Linienlast s eine Punktlast F zu erhalten, wird s mit der Länge l multipliziert.



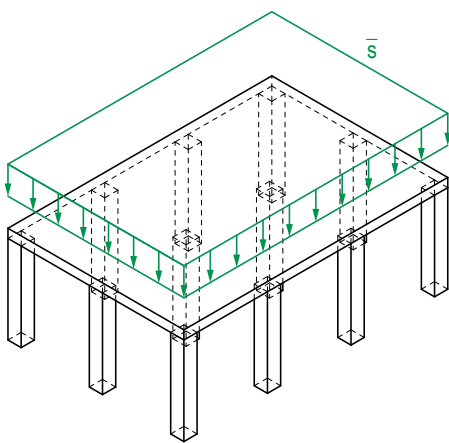
Um aus einer Flächenlast \bar{s} eine Punktlast F zu erhalten, wird \bar{s} mit der Breite b und der Länge l multipliziert.

3.4

Eine Flächenlast wirkt auf die gesamte Ausmasse einer Struktur. Zur Bestimmung der Last, welche ein bestimmtes Bauteil abtragen muss, wird die sogenannte Lasteinflusszone ermittelt. Es handelt sich dabei um eine Teilfläche der Flächenlast. Generell gilt: Lasten verlaufen auf direktestem Weg ins nächstgelegene Auflager. Daher wird die Distanz zwischen zwei lastabtragenden Bauteilen jeweils halbiert und so die Dimensionen der jeweiligen Lasteinflusszone gefunden.

Lasteinflusszone Stützen

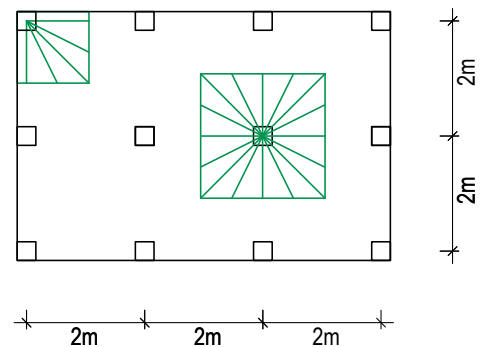
Gegeben ist eine Belastungssituation mit einer angreifenden Flächenlast, die auf eine Platte wirkt, welche ihrerseits auf einer Reihe von Stützen aufliegt. Werden nun die Distanzen zwischen den Stützen halbiert, so entstehen die jeweiligen Lasteinflusszonen der Stützen. Die Lasteinflusszone auf eine mittlere Stütze ist im folgenden Beispiel vier Mal so gross, wie diejenige auf eine Eckstütze. Beim Dimensionieren wird daher die mittlere Stütze betrachtet, da sie die grösste Kraft erfährt. Um nun die resultierende Punktlast auf die mittlere Stütze zu berechnen, wird die Flächenlast mit der Grösse der Lasteinflusszone multipliziert.



$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$$

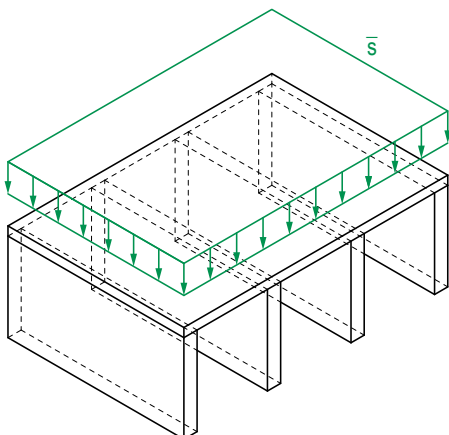
$$\bar{s}_d = 1 \text{ kN/m}^2$$

$$R = \bar{s}_d \cdot A = 4 \text{ kN}$$



Lasteinflusszone Balken/Scheiben

Gegeben ist eine Belastungssituation mit einer angreifenden Flächenlast, die auf eine Platte wirkt, welche ihrerseits auf einer Reihe von Scheiben aufliegt. Analog zum oberen Beispiel entstehen beim Halbieren der Distanzen zwischen den Scheiben die jeweiligen Lasteinflusszonen. Die Lasteinflusszone einer mittleren Scheibe ist im folgenden Beispiel doppelt so gross, wie diejenige auf eine Scheibe am Rand der Platte. Beim Dimensionieren wird daher wiederum die mittlere Scheibe betrachtet, da sie die grösste Kraft erfährt. Um nun die resultierende Punktlast zu berechnen, wird die Flächenlast mit der Grösse der Lasteinflusszone multipliziert. Da es sich bei der Scheibe um ein lineares Bauteil handelt, wird zudem auch die Grösse der Linienlast benötigt. Diese errechnet sich, indem die Resultierende durch die Länge des Bauteils dividiert wird.

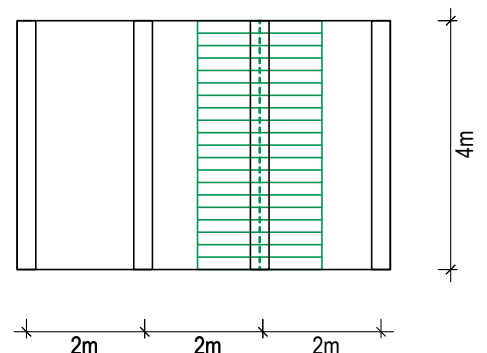


$$A = 2 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 8 \text{ m}^2$$

$$\bar{s}_d = 1 \text{ kN/m}^2$$

$$R = \bar{s}_d \cdot A = 8 \text{ kN}$$

$$g_d = R / l = 8 \text{ kN} / 4 \text{ m} = 2 \text{ kN/m}$$

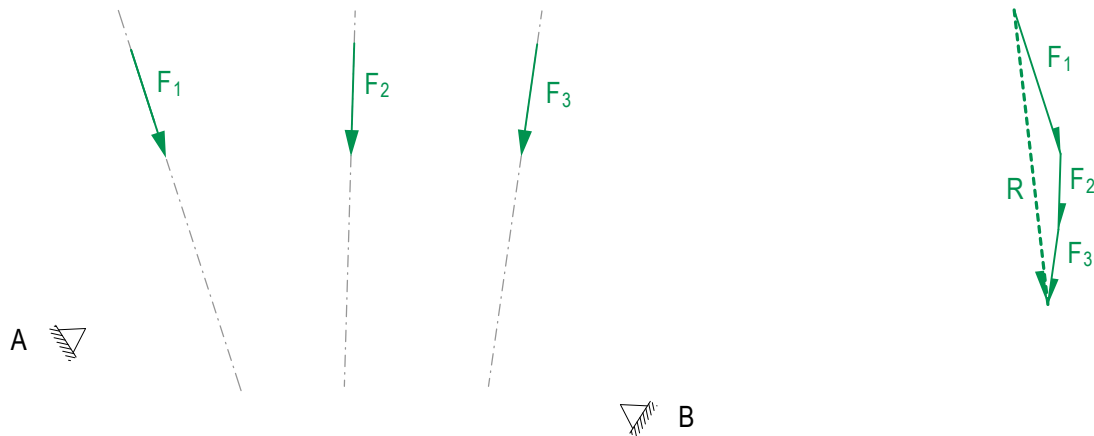


4.1

Stützlinie: Hilfsseilpolygon

Punktlasten

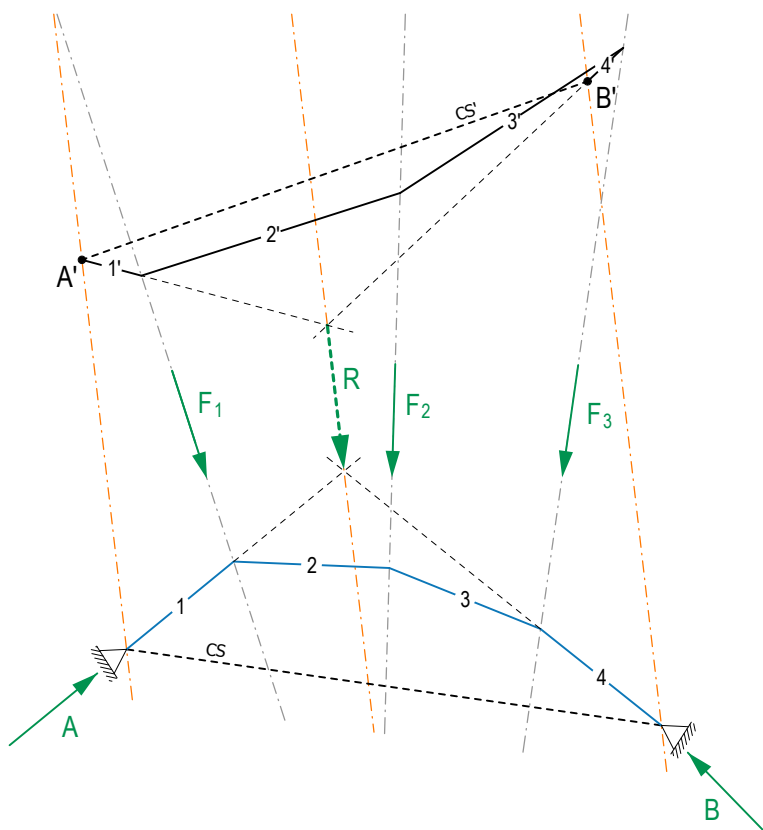
Gegeben sind drei ungleichmässig verteilte Punktlasten sowie die beiden asymmetrisch platzierten Auflager A und B. Gesucht ist eines von vielen möglichen Tragwerken, das unter der gegebenen Belastung im Gleichgewicht ist.



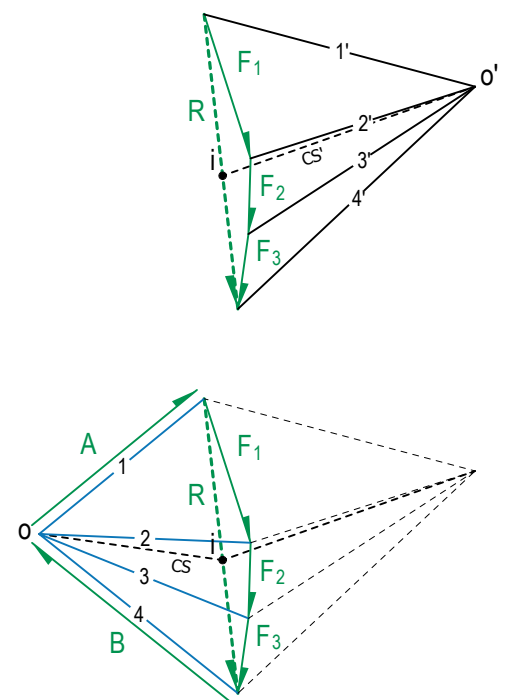
Die mit Hilfe der Belastungsliste gefundene Neigung der Resultierenden wird parallel durch die beiden Auflager im Lageplan verschoben. Nun wird die Hilfskonstruktion ausgehend von der Wirkungslinie durch Auflager A konstruiert und endet auf der Wirkungslinie durch Auflager B. Die Schlusslinie SL' zwischen den Punkten A' und B' wird dann parallel durch den Pol o' im Kräfteplan verschoben.

Der Schnittpunkt i von SL' mit der Resultierenden im Kräfteplan ist konstant, unabhängig von der Form des Hilfsseilpolygons. Der Punkt i wird daher auch Schlusslinienschnittpunkt genannt.

Daher wird auch die Schlusslinie SL , also die Verbindung zwischen A und B, parallel durch diesen Punkt verschoben. Im Kräfteplan kann nun, sofern keine weiteren Bedingungen gegeben sind, jeder Punkt auf der Schlusslinie als Pol o gewählt werden. Die dazugehörigen Strahlen 1 bis 4 werden dann in den Lageplan übertragen und ergeben eine Stützlinie durch die Auflager A und B.



Lagepläne 1:100



Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

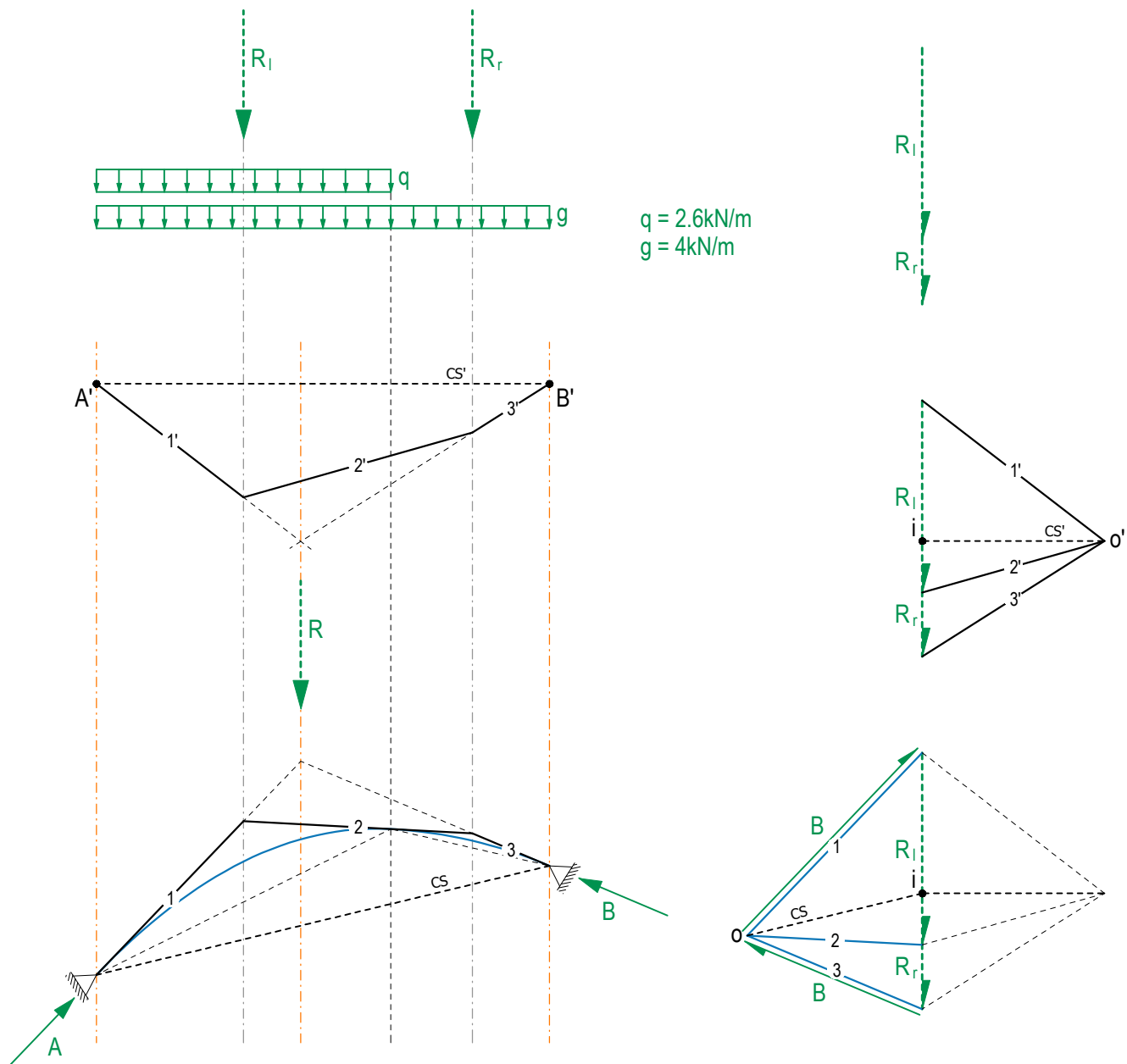
Linienlasten

Gegeben sind zwei ungleichmässig verteilte Linienlasten sowie die beiden asymmetrisch platzierten Auflager A und B. Gesucht ist eines von vielen möglichen Tragwerken, das unter der gegebenen Belastung im Gleichgewicht ist.

Zuerst wird die Belastung in ein rechtes und linkes Subsystem geteilt und die jeweilige Resultierende berechnet.

Die Wirkungslinie der Resultierenden wird parallel durch die beiden Auflager verschoben. Nun wird im Kräfteplan ein beliebiger Pol o' gewählt und die Hilfskonstruktion konstruiert, ausgehend von der Wirkungslinie durch das Auflager A. Die Schlusslinie SL' zwischen den Punkten A' und B' wird parallel durch den Pol o' in den Kräfteplan übertragen.

Wiederum wird die Schlusslinie SL parallel durch Punkt i verschoben und darauf ein Pol o gewählt. Die dazugehörigen Strahlen 1 bis 3 können nun in den Lageplan übertragen werden. Diese ergeben eine Stützlinie durch die Auflager A und B, welche die Resultierenden R_l und R_r aufnimmt. Die Strahlen sind gleichzeitig auch die Tangenten der gesuchten Parabeln. So kann mittels der Parabelkonstruktion die genaue Form im linken sowie im rechten Subsystem ermittelt werden.



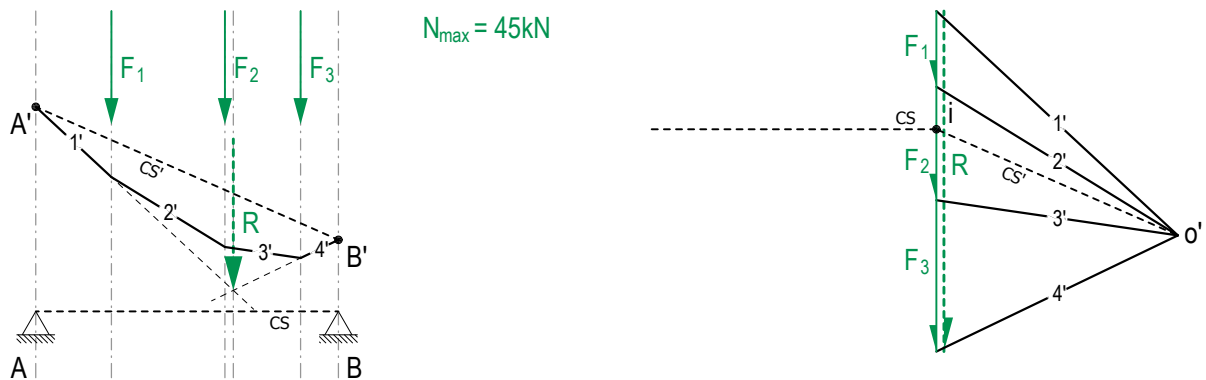
Lagepläne 1:100

Kräftepläne $1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ kN}$

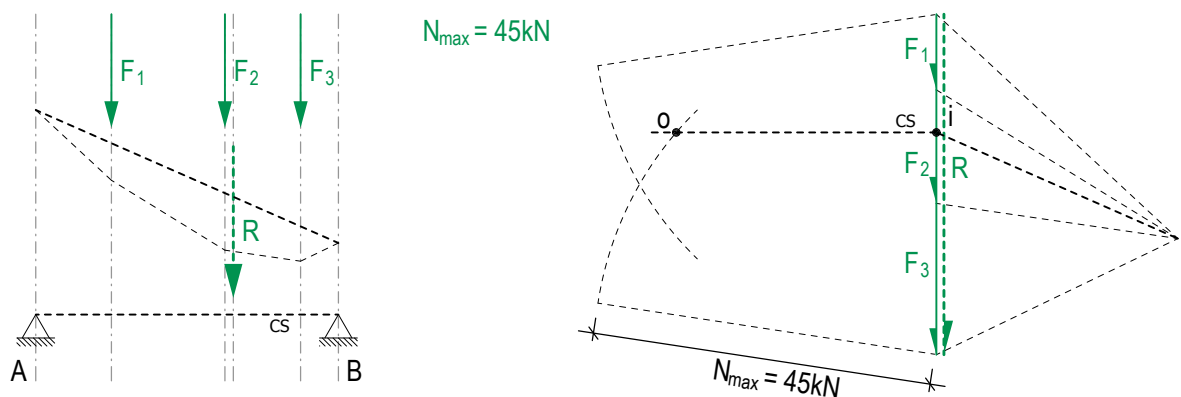
4.2

Gegeben ist eine Belastungssituation mit drei angreifenden Kräften. Gesucht ist eine Bogenform, bei welcher die massgebende Kraft im Bogen 45kN nicht übersteigt.

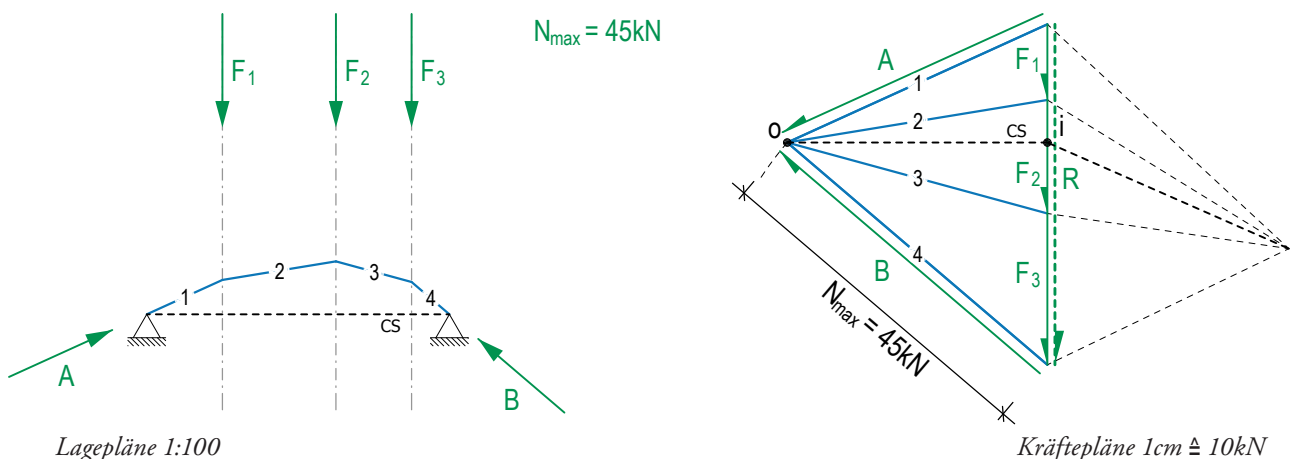
Mittels einer Hilfskonstruktion wird die Lage der Resultierenden sowie der Auflagerpunkte A' und B' lokalisiert. Die Schlusslinie dieser Hilfskonstruktion SL' wird durch den Pol o' verschoben und schneidet die Resultierende im Punkt i . Ebenso verläuft die Schlusslinie SL durch i .



Da die Kräfte bei den Auflagern am grössten sind, wird nun das globale Gleichgewicht ermittelt. Die Grösse der Kraft ist vorgegeben, nicht aber deren Richtung. Daher werden die gegebenen 45kN mit einem Zirkel vom Anfang sowie vom Ende der Resultierenden aus abgetragen. Von den beiden entstehenden Schnittpunkten mit der Schlusslinie ist derjenige näher an i relevant – dies ist der Pol o .



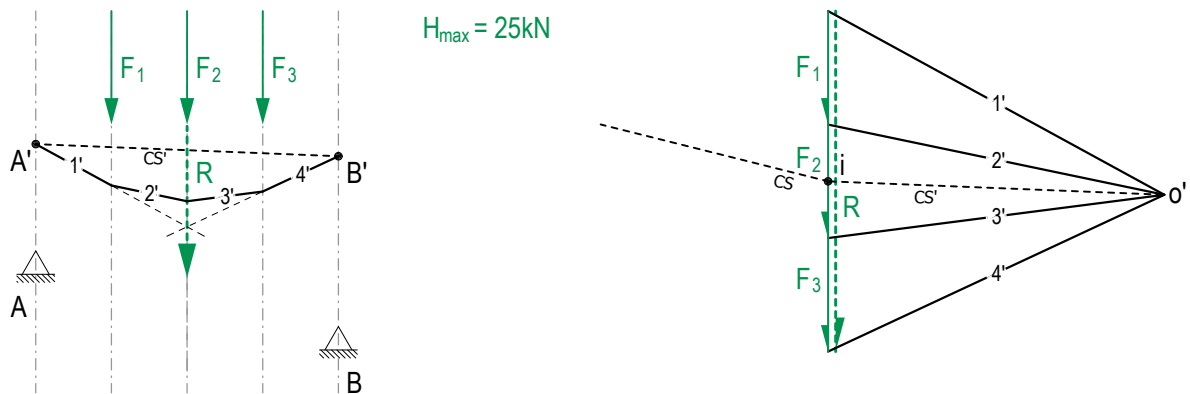
Zuletzt können die Strahlen der Reihe nach in den Lageplan übertragen werden. Der gezeichnete Bogen besitzt die minimale statische Höhe, welche die Anforderung $N_{\text{dmax}} \leq 45\text{kN}$ erfüllt. Mit der Vorgabe einer maximalen inneren Kraft sind auch steilere Bögen denkbar, da mit zunehmender statischer Höhe die inneren Kräfte abnehmen. Für weitere mögliche Lösungen liegt der Pol o also näher an i .



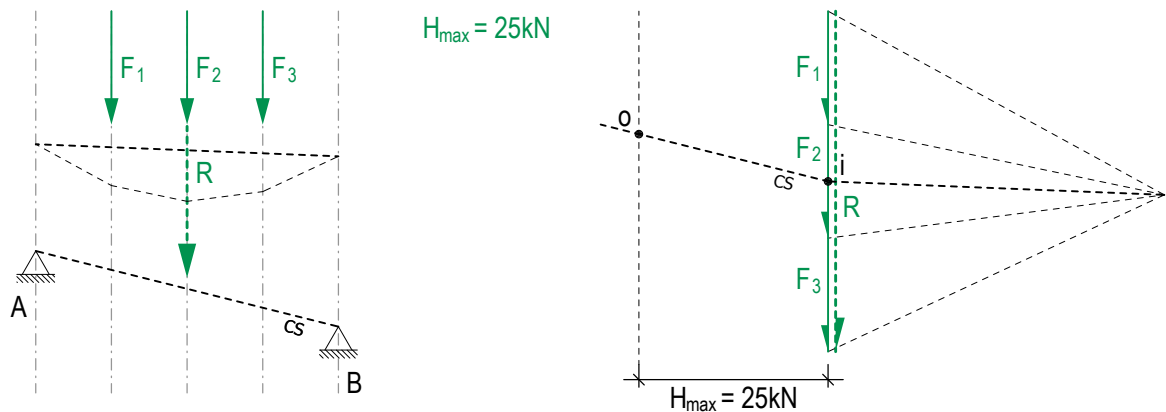
4.2

Gegeben ist eine Belastungssituation mit drei angreifenden Kräften und asymmetrisch angeordneten Auflagern. Gesucht ist eine Bogenform, bei welcher die horizontale Schubkraft in den Auflagern 25kN nicht übersteigt.

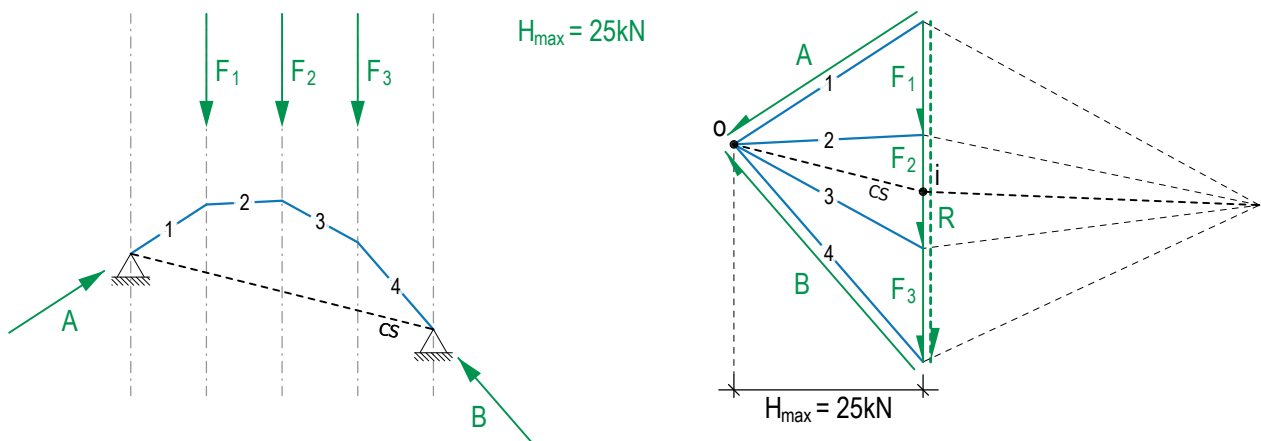
Mittels einer Hilfskonstruktion wird die Lage der Resultierenden sowie der Auflagerpunkte A' und B' lokalisiert. Die Schlusslinie dieser Hilfskonstruktion SL' wird durch den Pol o' verschoben und schneidet die Resultierende im Punkt i. Ebenso verläuft die Schlusslinie SL durch i.



Nun wird die maximale Schubkraft H_{\max} in den Kräfteplan übertragen. Dafür wird parallel zur Resultierenden eine Linie gezeichnet die den maximalen Schub in den Auflagern markiert. Im Schnittpunkt dieser Linie mit der Schlusslinie SL befindet sich der Pol o.



Zuletzt können die Strahlen der Reihe nach in den Lageplan übertragen werden. Der gezeichnete Bogen besitzt die minimale statische Höhe, welche die Anforderung $H_{\max} \leq 25\text{kN}$ erfüllt. Mit der Vorgabe einer maximalen Horizontalkomponente sind auch steilere Bögen denkbar, da mit zunehmender statischer Höhe die Schubkräfte abnehmen. Für weitere mögliche Lösungen liegt der Pol o also näher an i.



Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

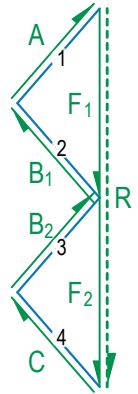
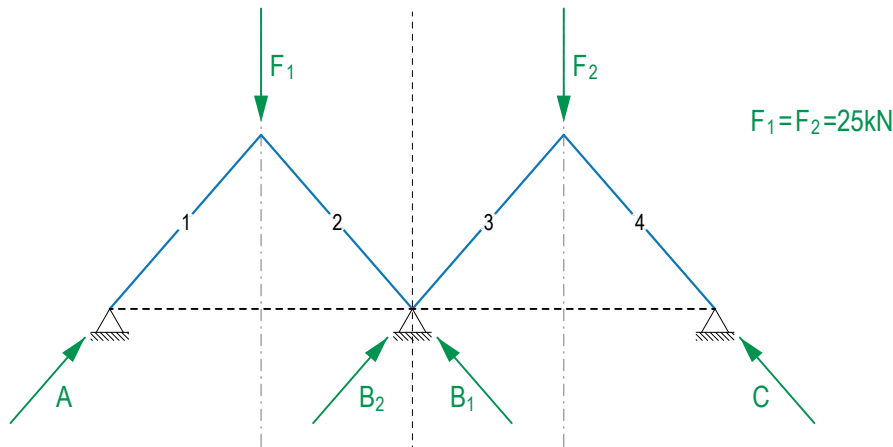
4.3

Kompodium Tragwerksentwurf I&II

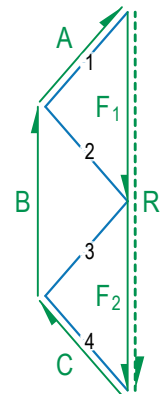
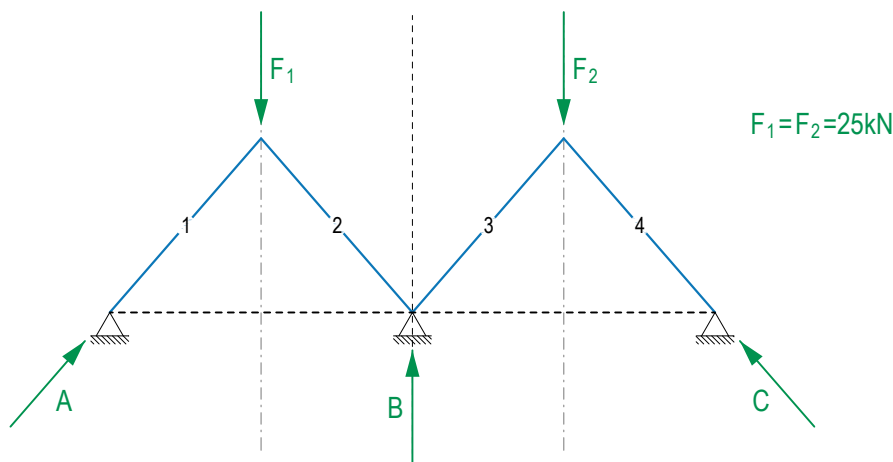
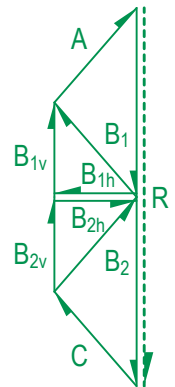
Systeme aufteilen

Im Folgenden wird ein Tragwerk mit drei Auflagern betrachtet. Gegeben sind zwei Punktlasten sowie die drei Auflager A, B und C. Gesucht ist eine mögliche Stützlinie unter der gegebenen Belastung und die Kräfte in den drei Auflagern.

Zuerst wird das System in ein linkes und ein rechtes Subsystem unterteilt. F_1 , A und B bilden den linken und F_2 , B und C den rechten Teil. Auf der Wirkungslinie von F_1 wird nun ein Punkt gewählt und mit den beiden Auflagern verbunden. Diese Stützlinie entspricht den Auflagerkräften A und B_1 , welche parallel in den Kräfteplan verschoben werden. Analog geschieht dies mit dem rechten Subsystem, was im Kräftepolygon $F_2 - C - B_2$ resultiert.



Die Auflagerkräfte B_1 und B_2 können nun im Kräfteplan zur Auflagerkraft B addiert werden. Da die Horizontalkomponenten der Auflagerkräfte B_1 und B_2 gleich gross sind, allerdings in entgegengesetzte Richtung zeigen, heben sich diese auf. Als Resultat wird die Auflagerkraft B vertikal. Zusammen mit der Belastungslinie ergeben die Auflagerkräfte ausserdem ein geschlossenes Polygon, was beweist, dass sich das System im globalen Gleichgewicht befindet.

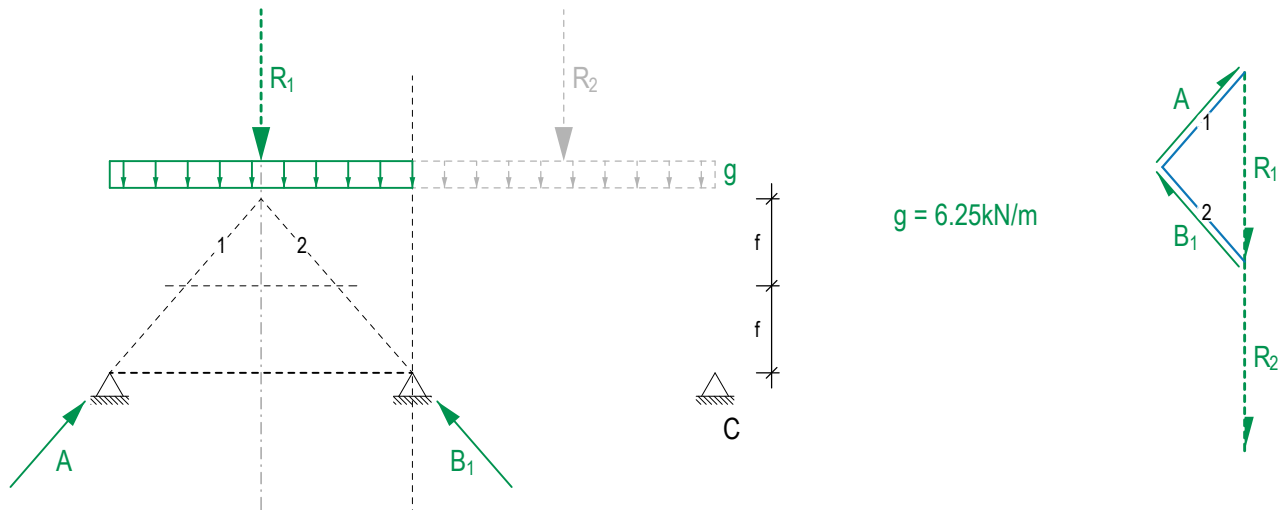


4.3

Systeme aufteilen

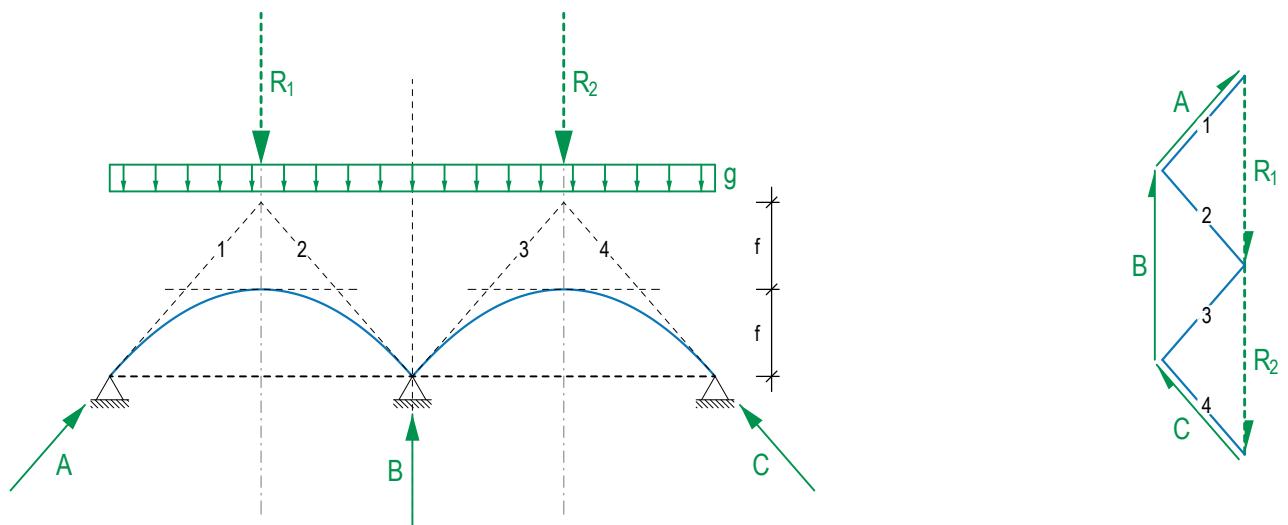
Im Folgenden wird ein Tragwerk mit drei Auflagern betrachtet. Gegeben ist eine ständige Linienlast sowie drei Auflager A, B und C. Gesucht ist eine mögliche Stützlinie unter der gegebenen Belastung und die Kräfte in den drei Auflagern.

Zuerst wird das System in ein linkes und ein rechtes Subsystem unterteilt. Dabei wird die Linienlast beim mittleren Auflager geteilt und es entstehen zwei Teilresultierende R_1 und R_2 . Auf der Wirkungslinie von R_1 wird nun ein Punkt gewählt und mit den beiden Auflagern verbunden. Dies sind die Tangenten an die linke Parabel, welche den Auflagerkräften A und B_1 entsprechen. Analog geschieht dies mit dem rechten Subsystem.



Wiederum können die Auflagerkräfte B_1 und B_2 im Kräfteplan zur Auflagerkraft B addiert werden. Zusammen mit der Belastungslinie ergeben die Auflagerkräfte ein geschlossenes Polygon, was beweist, dass sich das System im globalen Gleichgewicht befindet.

Zum Schluss kann die Kurve mit Hilfe der drei Tangenten von Hand in den Lageplan eingezeichnet werden.



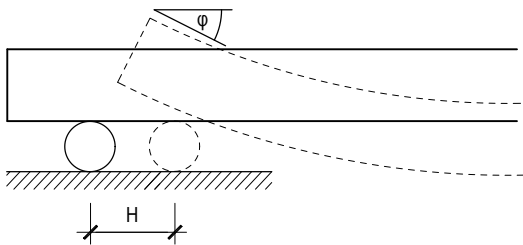
5.1

Auflager

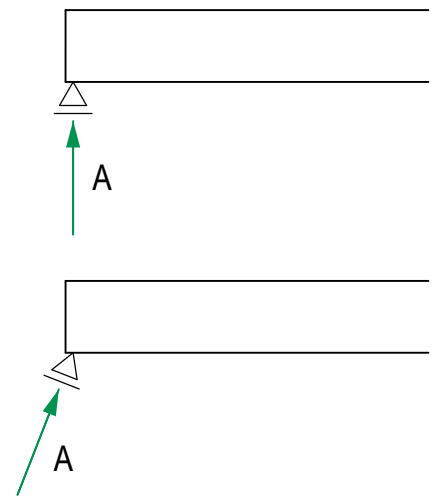
Als Auflager werden Stellen am Tragwerk bezeichnet, wo dieses auf anderen Bauteilen oder dem Baugrund aufliegt. Je nach Auflagerungsart, kann eine unterschiedliche Anzahl von Auflagerreaktionen entstehen. Diese entstehen durch die unterschiedlichen Möglichkeiten an Bewegungen des Tragwerks beim Auflager.

Verschiebliches Auflager (Rolllager)

Ein verschiebliches Auflager erlaubt sowohl eine Verdrehung (φ) wie auch eine Verschiebung H des Auflagers. Bei verschieblichen Auflagern kann nur eine Kraft A , die senkrecht zur Bewegungsebene verläuft, aufgenommen werden. Das Rolllager ist daher ein einwertiges Auflager.

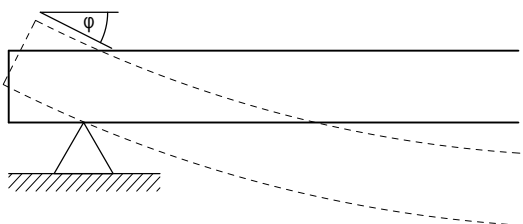


Darstellung im statischen System

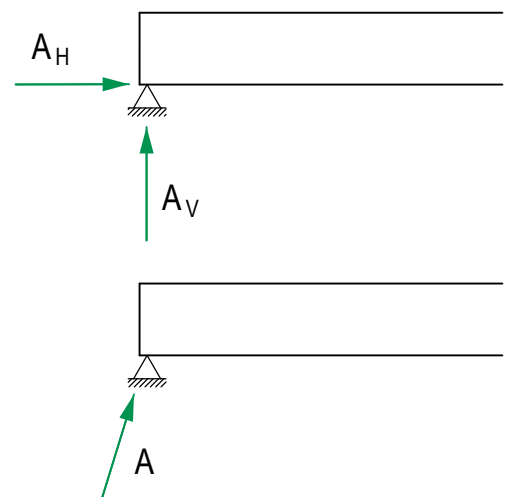


Festes Auflager (Kipplager)

Das feste Auflager erlaubt zwar eine Verdrehung (φ), aber keine Verschiebung des Auflagers. Die Auflagerreaktion kann in die zwei Komponenten A_h und A_v zerlegt werden. Es handelt sich daher um ein zweiwertiges Auflager.

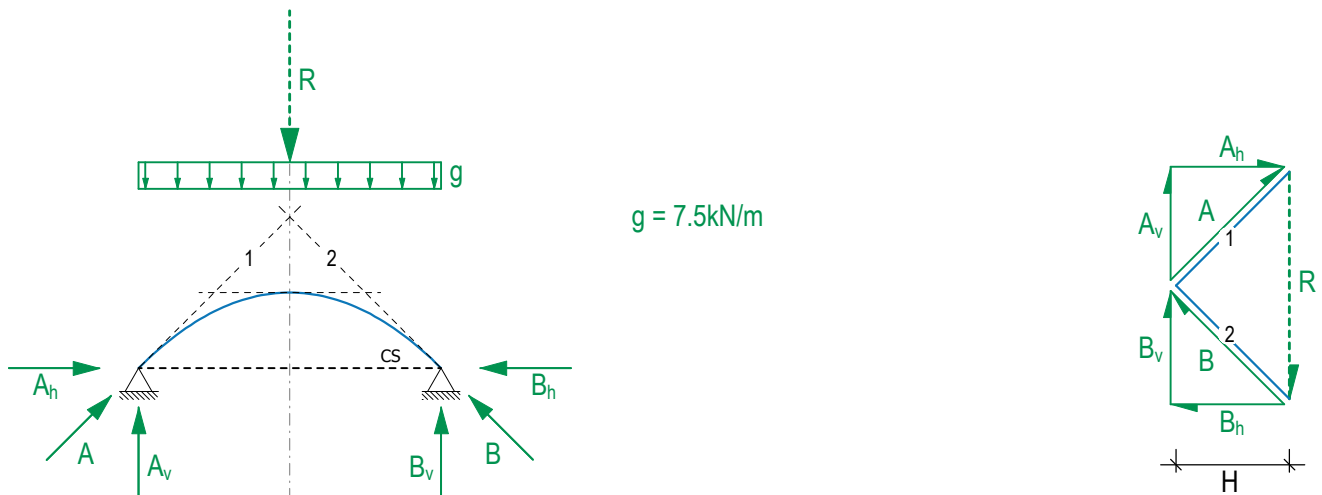


Darstellung im statischen System

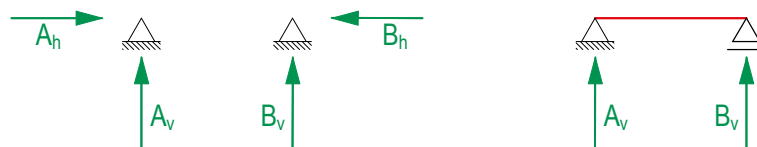


5.2

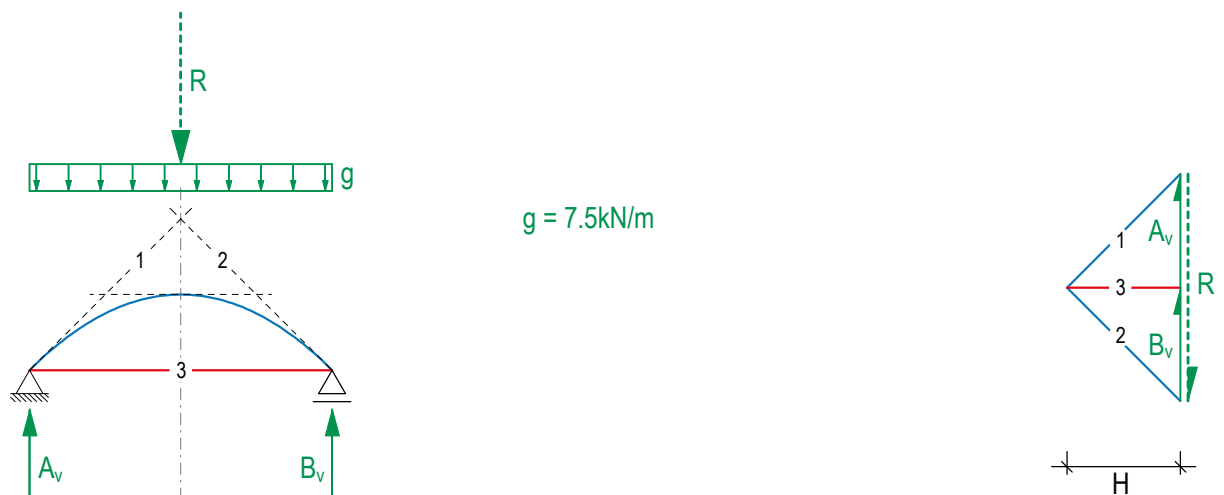
Im Folgenden wird ein einfaches Bogentragwerk betrachtet, das eine konstante Linienlast in die beiden festen Auflager A und B abträgt. Die Auflagerkräfte können in ihre Horizontal- und Vertikalkomponenten aufgeteilt werden. A_h und B_h nehmen dabei den horizontalen Schub auf, den der Bogen, in Abhängigkeit seiner Stichhöhe, verursacht.



Oftmals wird in einem Tragwerk aber ein Rolllager verwendet, welches nur vertikale Kräfte aufnehmen kann. Daher muss der horizontale Schub innerhalb des Tragwerks aufgenommen werden. Dafür wird zwischen den beiden Auflagern ein Zügelement eingeführt. Dadurch werden beide Auflagerkräfte vertikal.



Anstatt, dass eine horizontale Auflagerkraft von aussen auf das System wirkt, zieht nun die innere Kraft den Bogen zusammen und verhindert dass das Auflager B zur Seite „wegrollt“. Die Kraft im Seil entspricht dabei derjenigen der Horizontalkomponenten der Auflagerkräfte. Die Kombination von druckbeanspruchtem Bogen und zugbeanspruchtem Seil nennt sich Bogen-Seil-Tragwerk.



Lagepläne 1:100

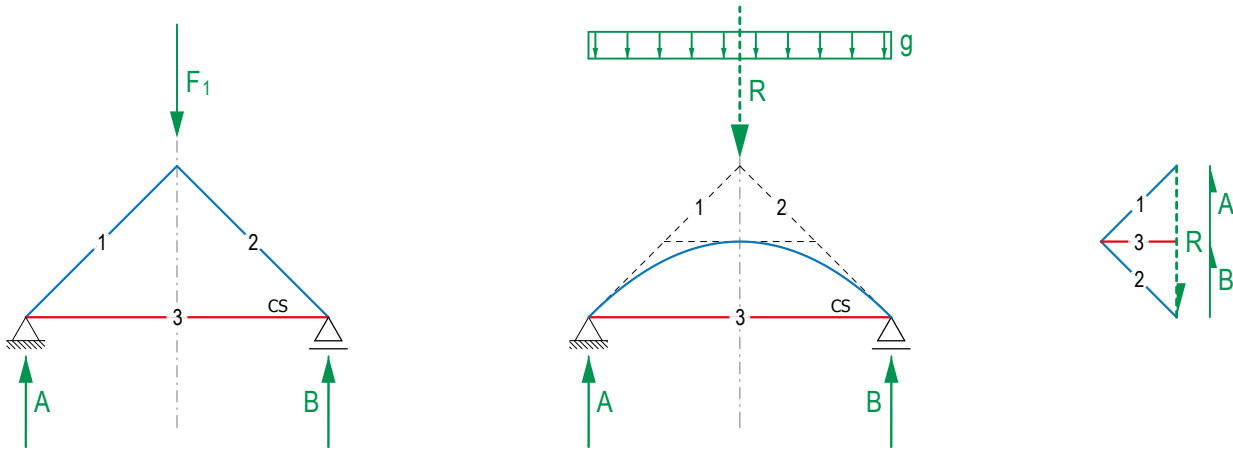
Kräftepläne $1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ kN}$

5.3

Kompodium Tragwerksentwurf I&II Vergleich: Spannen – Auskragen

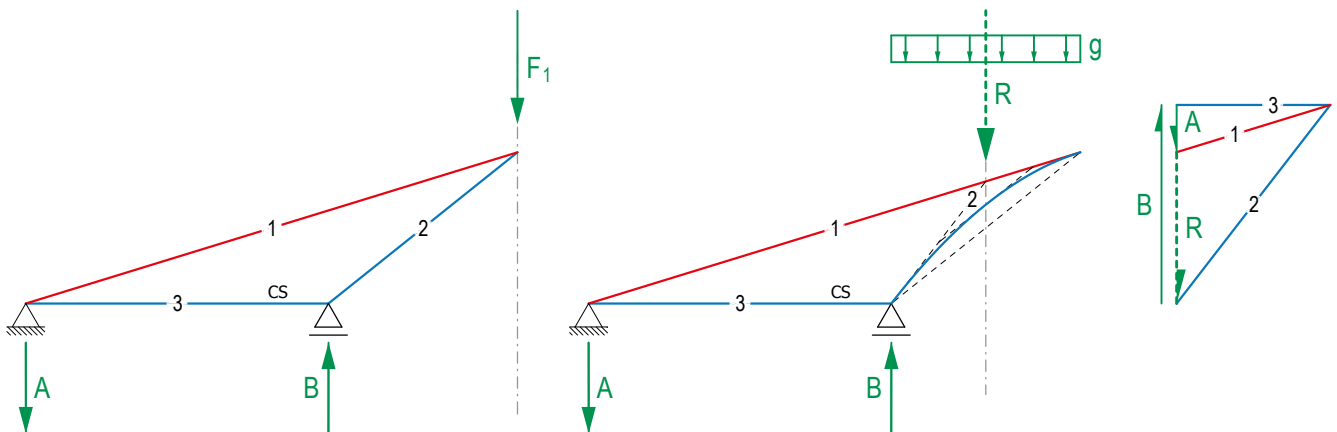
Spannen

Befindet sich die Resultierende aller angreifenden Kräfte zwischen zwei Auflagern, so ist dies eine sogenannte Überspannung. Beide Auflagerkräfte wirken den angreifenden Kräften entgegen.



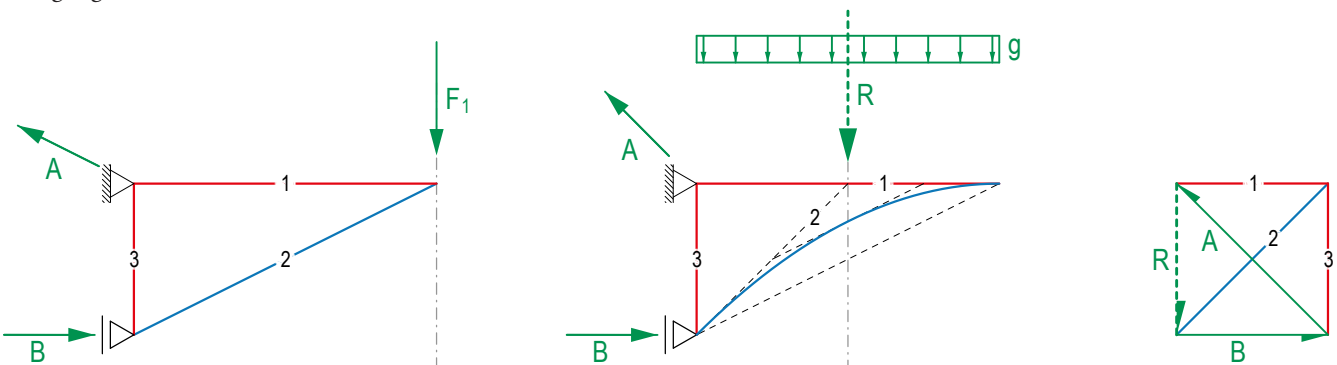
Auskragen

Befindet sich die Resultierende aller angreifenden Kräfte ausserhalb der Auflager, so ist dies eine Auskragung. Die Auflagerkraft A ist in diesem Beispiel eine Zugkraft, da sonst das gesamte System nach rechts wegkippen würde (siehe 1.4 Stabilität).



Auskragen: Konsole

Ein Spezialfall der Auskragung ist die Konsole. Die Auflager befinden sich dabei vertikal übereinander. Während bei einer horizontalen Anordnung der Auflager auch Kombinationen zwischen Überspannungen und Auskragungen möglich sind, wird hier eine reine Auskragung betrachtet.



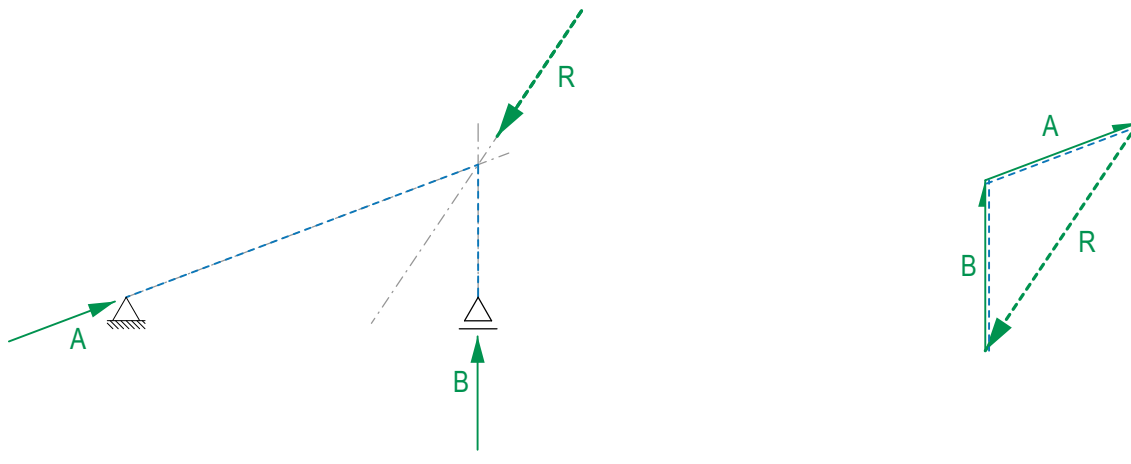
Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

Auflagerkräfte bei nicht parallelen Wirkungslinien

Schneiden sich die Wirkungslinie der Resultierenden und die Wirkungslinien der Auflagerkräfte im Lageplan in einem Punkt, kann das globale Gleichgewicht direkt grafisch ermittelt werden.

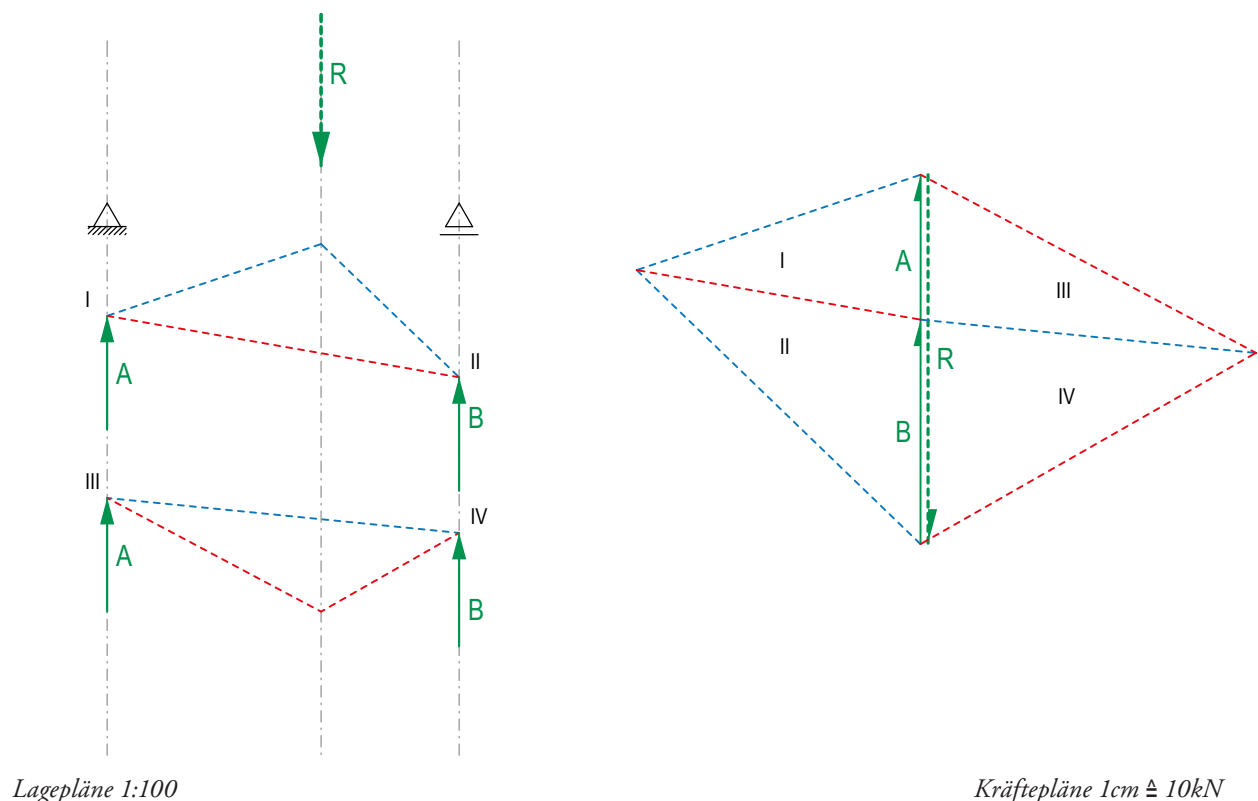
Im gegebenen Beispiel schneiden sich die senkrechte Wirkungslinie des Auflagers B und die Wirkungslinie der Resultierenden in einem Punkt. Aus dem Gleichgewicht dieses Schnittpunktes wird die Grösse und die Richtung der Auflagerkräfte im Kräfteplan ermittelt.



Auflagerkräfte bei parallelen Wirkungslinien

Ist die Wirkungslinie der Resultierende parallel zur Wirkungslinie der Auflagerkräfte, kann das globale Gleichgewicht und die Auflagerkräfte mittels eines triangulierten Hilfsstragwerkes ermittelt werden. Dafür wird ein Dreieck konstruiert, welches die Resultierende in die Auflager ableiten kann. Anschliessend wird der dazugehörige Kräfteplan gezeichnet. Aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knoten lassen sich die Grösse und die Richtung der Auflagerkräfte ermitteln.

Wie im Kräfteplan zu lesen ist, führen beide Hilfsstragwerke zur selben Lösung für die Grösse und Richtung der Auflagerkräfte.



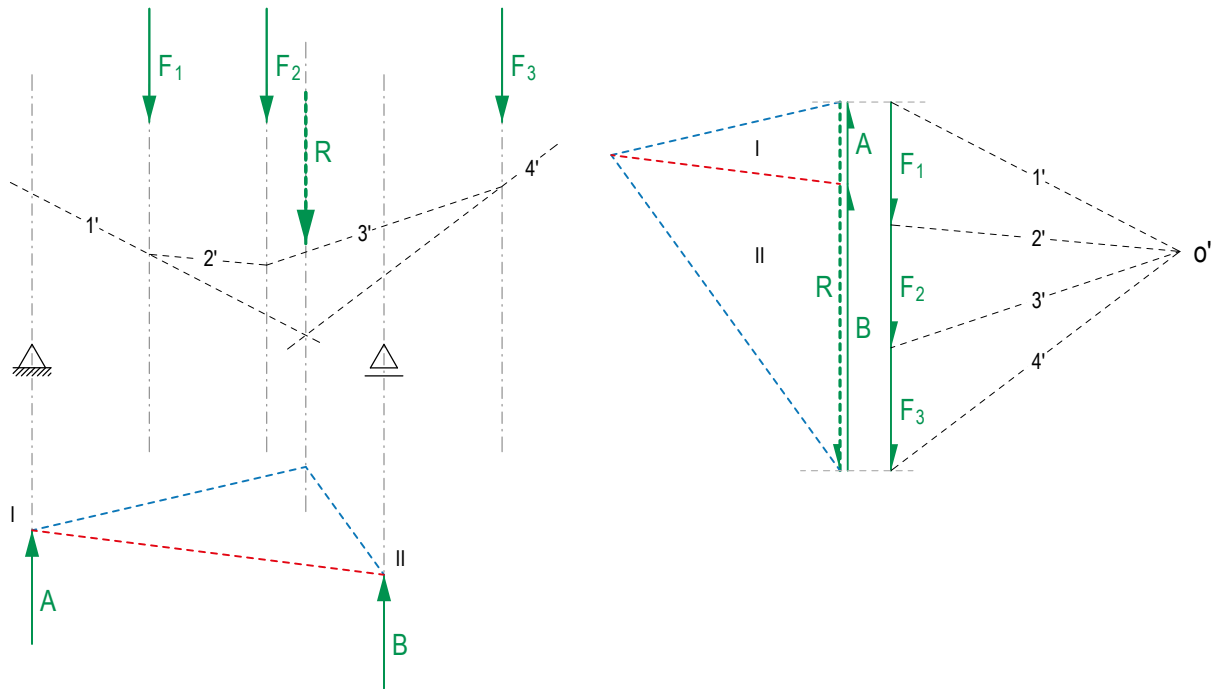
6.1

Kompodium Tragwerksentwurf I&II Globales Gleichgewicht

Resultierende und Auflagerkräfte bei parallelen Wirkungslinien

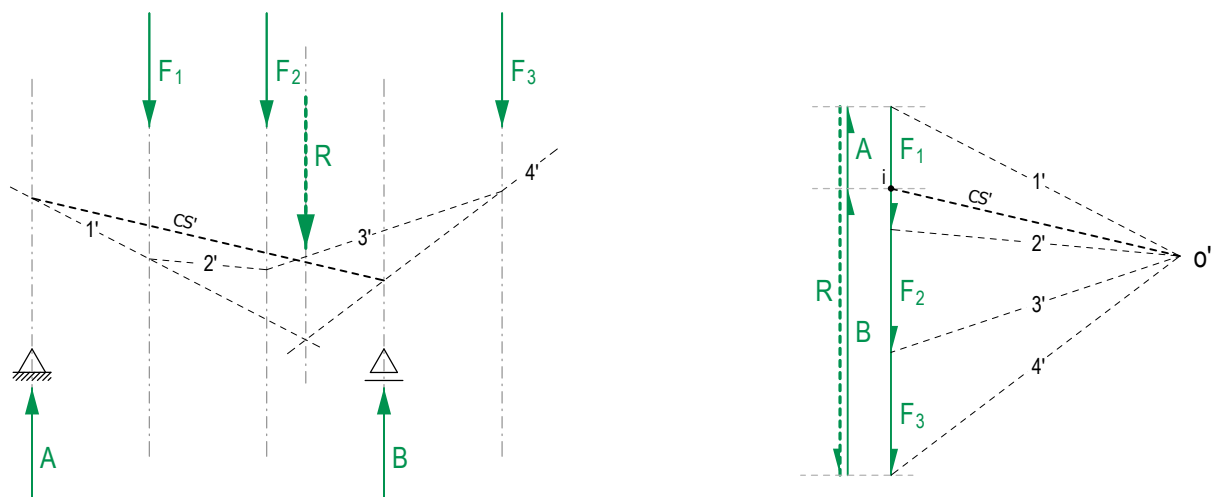
Wird das System von mehreren angreifenden Kräfte beansprucht, so muss die Lage und Grösse der Resultierende mittels Hilfskonstruktion (siehe 1.3) gefunden werden, bevor das Globale Gleichgewicht und die Grösse der Auflagerkräfte ermittelt werden kann.

Ist die Lage und Richtung der Resultierende bekannt, kann die Grösse der Auflagerkräfte wie im vorherigen Beispiel mittels eines Hilfstragwerkes ermittelt werden.



Eine andere Methode die Grösse der Auflagerkräfte zu ermitteln, liefert die Konstruktion des Schlusslinienschnittpunktes i . Diese Methode sollte aber vorzugsweise nur dann angewendet werden, wenn die Wirkungslinie der Resultierende parallel zur Wirkungslinie der Auflagerkräfte ist.

Zuerst wird im Kräfteplan die Belastungslinie gezeichnet. Danach wird ein Pol o' frei gewählt und die Strahlen zu allen Anfängen und Enden der angreifenden Kräfte gezogen. Diese werden dann parallel in den Lageplan übertragen. Die damit gefundene Schlusslinie der Hilfskonstruktion CS' wird schliesslich parallel durch o' in den Kräfteplan verschoben und schneidet die Belastungslinie im Punkt i . Der Schlusslinienschnittpunkt i teilt die Belastungslinie in die beiden Auflagerkräfte A und B .



Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

6.2

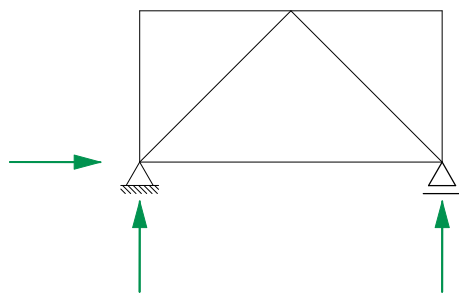
Ein ebenes Fachwerk ist innerlich statisch bestimmt, wenn die Anzahl der Fachwerkstäbe (S) addiert mit den möglichen Auflagerreaktionen (A) im System der doppelten Anzahl der Fachwerkknoten (K) entspricht.

$S + A = 2 \cdot K$ = statisch bestimmt

$S + A < 2 \cdot K$ = statisch unbestimmt (instabil)

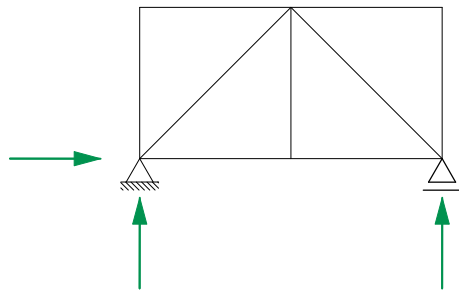
$S + A > 2 \cdot K$ = statisch unbestimmt (überbestimmt)

Um ein innerlich statisch bestimmtes Fachwerk zu erhalten und somit dessen Stabilität und Steifigkeit zu gewährleisten, muss das Fachwerk immer trianguliert sein. Bei viereckigen Feldern fehlt ein Stab, was zu einem instabilen System führt. Andererseits kann es auch zu viele Stäbe geben. Diese sogenannten überbestimmten Fachwerke lassen sich nicht mehr mit einfachen Mitteln wie der grafischen Statik bestimmen.



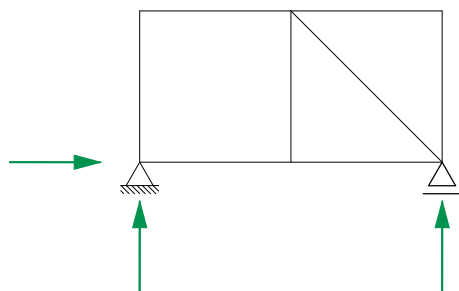
$$7 + 3 = 2 \cdot 5 \quad \checkmark$$

↳ **statisch bestimmt**
= 1 mögliche Lösung für den inneren Kräfteverlauf



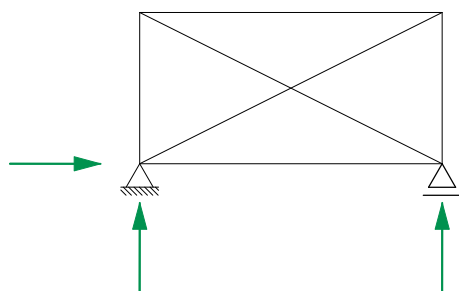
$$9 + 3 = 2 \cdot 6 \quad \checkmark$$

↳ **statisch bestimmt**
= 1 mögliche Lösung für den inneren Kräfteverlauf



$$8 + 3 < 2 \cdot 6 \quad \times$$

↳ **statisch unbestimmt (instabil)**
= zu wenig Stäbe, wird zusammenbrechen (nicht trianguliert)



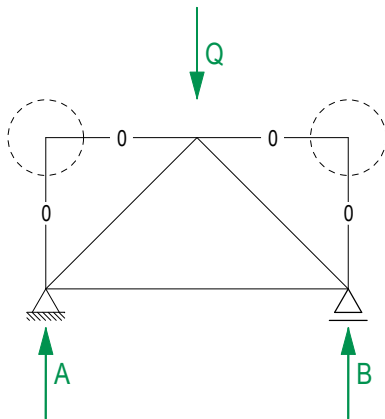
$$8 + 3 > 2 \cdot 5 \quad \times$$

↳ **statisch unbestimmt (überbestimmt)**
= zu viele Stäbe, viele mögliche Lösungen für den inneren Kräfteverlauf

6.3

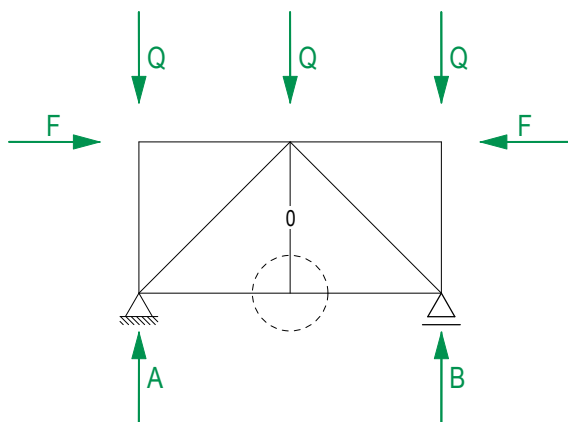
Nullstäbe

In Fachwerken besteht die Möglichkeit, dass gewisse Elemente unter einem spezifischen Belastungsfall keine Kräfte aufweisen. Diese Elemente werden Nullstäbe genannt und im Lageplan mit «0» gekennzeichnet. Sie dürfen aber aus Stabilitätsgründen nicht einfach entfernt werden, denn sobald sich die angreifende Belastung verändert, werden sie wieder eine Kraft aufnehmen müssen. Nullstäbe werden beim Konstruieren des Kräfteplans erkannt, wenn sich das lokale Gleichgewicht im Knoten auch ohne den besagten Stab einstellt. Die Kraft im Stab ist gleich Null, weshalb es im Kräfteplan keine Linie gibt, die dem Element im Lageplan entspricht. In gewissen Situationen können Nullstäbe schon identifiziert werden, bevor mit dem Konstruieren des Kräfteplans begonnen wurde. Dazu gibt es drei verschiedene Regeln:



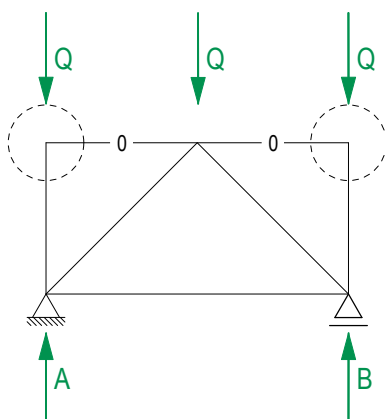
Unbelasteter Knoten – zwei Stäbe

Treffen zwei Stäbe mit unterschiedlicher Richtung aufeinander, sind beide Nullstäbe.



Unbelasteter Knoten – drei Stäbe

Liegen zwei der drei Stäbe in gleicher Richtung, ist der dritte ein Nullstab.



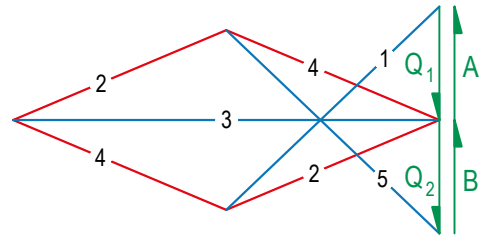
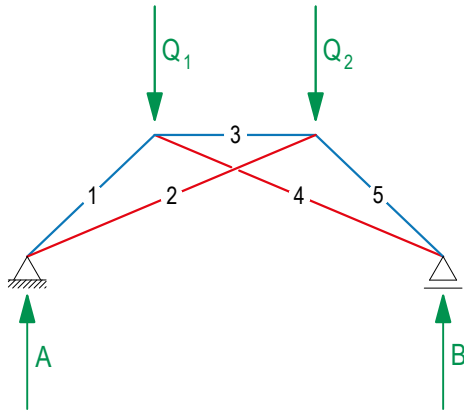
Belasteter Knoten – zwei Stäbe

Greift die Belastung in Richtung eines Stabs an, so ist der andere ein Nullstab.

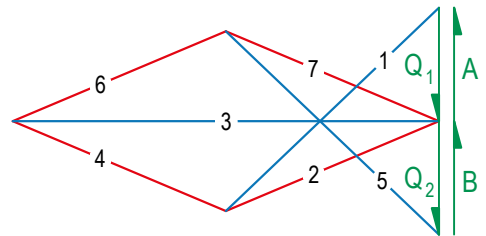
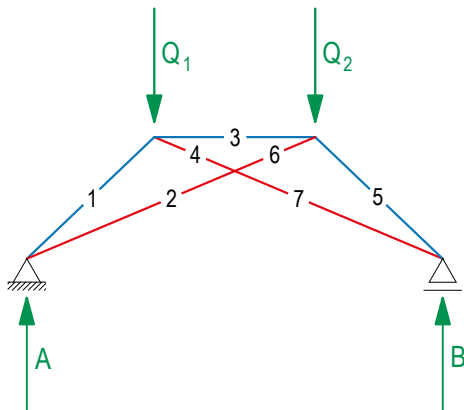
7.1

Überschneidende Elemente

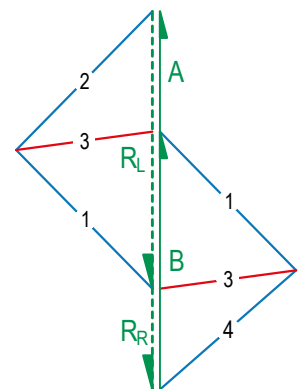
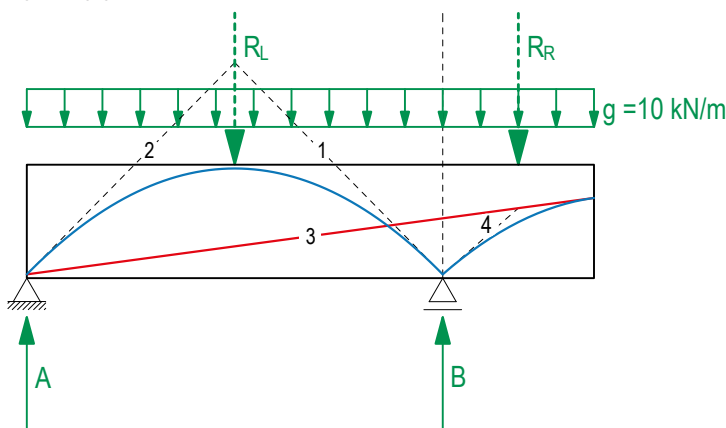
Generell gilt in der grafischen Statik: Ein Element im Lageplan besitzt eine entsprechende Linie im Kräfteplan. Dies ist jedoch nur der Fall, solange sich die Elemente im Lageplan nicht überschneiden oder überlagern. Eine Überschneidung ist insofern ein fiktiver Knoten, da sich die Elemente im zweidimensionalen Raum kreuzen, in der dritten Dimension aber aneinander vorbei verlaufen. Überschneidende Stäbe müssen im Kräfteplan doppelt gezeichnet werden, damit geschlossene Kräftepolygone erzeugt werden.



Im oberen Beispiel bilden die überschneidenden Stäbe 2 und 4 ein Parallelogramm, also ein Viereck im Kräfteplan. Diese Überschneidung kann im zweidimensionalen Raum alternativ auch als Knoten mit vier Stäben betrachtet werden. Der Knoten im unteren Beispiel besteht dann aus den Stäben 2, 4, 6 und 7, wobei jeweils 2 und 6, sowie 4 und 7 die gleiche Kraft erfahren, zumal es sich dabei um das jeweils gleiche Element im dreidimensionalen Raum handelt. Am Kräfteplan ändert sich derweil nichts ausser der Beschriftung.



Analog zum oberen Beispiel kommt es auch bei verteilten Lasten zu Überschneidungen. Im folgenden Beispiel überschneidet sich die rechte Tangente der Parabel (1) mit dem Zugband (3). Dementsprechend kommen beide Elemente im Kräfteplan doppelt vor. Zudem überlagern sich am äußersten rechten Ende des Balkens das Zugband und die rechte Tangente der halben Parabel. Beide Elemente weisen die gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtungen auf und liegen im Lageplan aufeinander, weshalb von einer Überlagerung gesprochen wird.

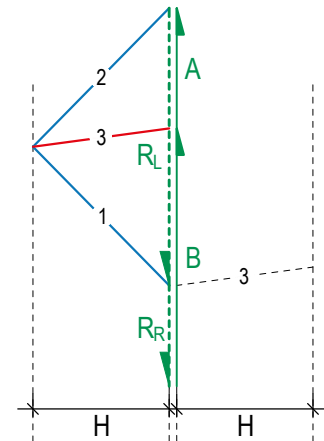
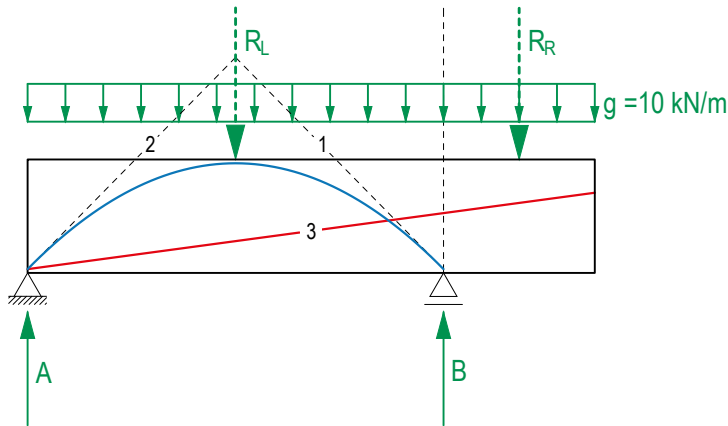


Lagepläne 1:100

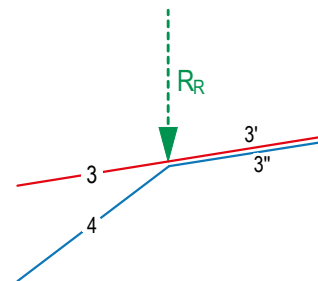
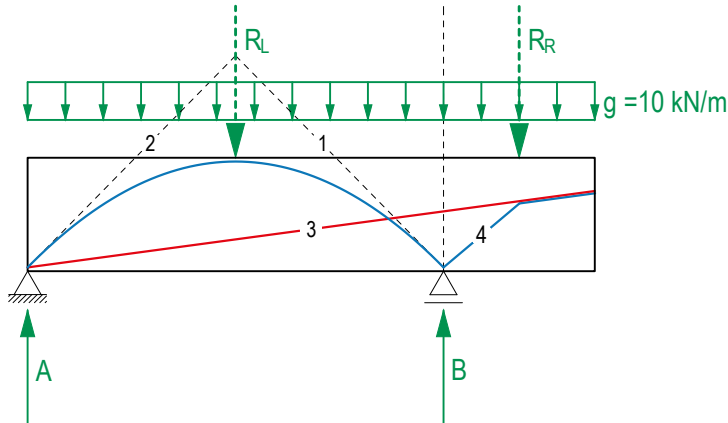
Kräftepläne 1cm $\hat{=}$ 15kN

7.2

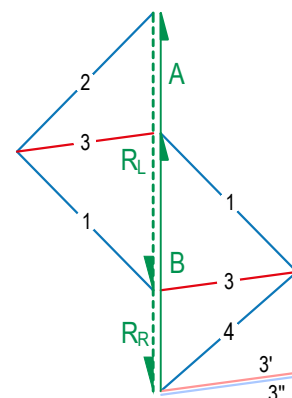
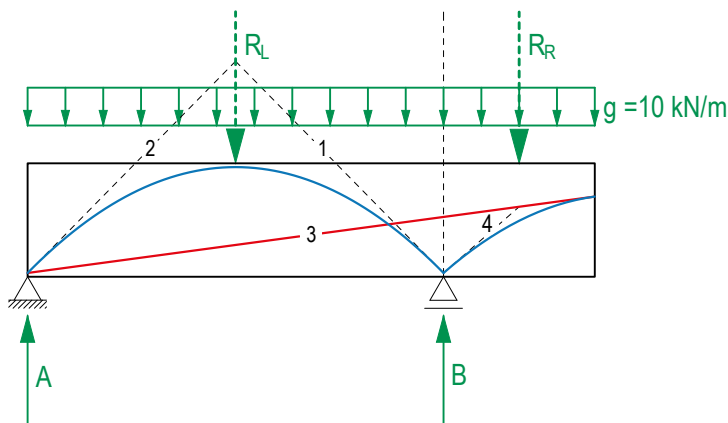
Gesucht wird ein möglicher Kräfteverlauf im Balken, der die angreifende Linienlast in die beiden Auflager leitet. Der gegebene Balken spannt einerseits zwischen den beiden Auflagern und kragt zudem auf der rechten Seite aus. Um ein solches kombiniertes System zu lösen, wird die Linienlast in zwei Subsysteme unterteilt. Begonnen wird beim Subsystem mit der grösseren Spannweite. Dort wird die gesamte statische Höhe vollständig ausgenutzt. Unter der gegebenen Belastung ergibt sich also im linken Subsystem eine Parabel mit den Tangenten 1 und 2. Mit Hilfe der Auflagerkraft A wird dann die Neigung des Zuelements (3) gefunden. Im rechten Subsystem stellt sich ebenfalls eine Parabel ein, deren horizontaler Schub (H) demjenigen der Tangente 1 entsprechen muss, um den Knoten mit der Auflagerkraft B ins Gleichgewicht zu bringen. Zusätzlich verläuft der halbe Druckbogen nach rechts nicht in ein Auflager und muss daher vom Zugband in der gleichen Richtung zurückgezogen werden.



Der Schnittpunkt des Zugbandes (3) mit R_R ist ein Knoten mit insgesamt fünf Elementen, wobei sich 3' und 3'', welche rechts nicht in ein Auflager verlaufen können, gegenseitig aufheben müssen. Entsprechend können diese beiden Elemente im Knoten vernachlässigt werden und es wird im Uhrzeigersinn erst die Tangente (4) und danach das Zugband (3) in den Kräfteplan übertragen.



Schliesslich werden alle Elemente im Kräfteplan zusammengeführt und die Parabeln mit Hilfe der jeweiligen Tangenten im Lageplan konstruiert. Zur Vollständigkeit wurden hier die beiden Elemente 3' und 3'' ebenfalls noch in den Kräfteplan gezeichnet.



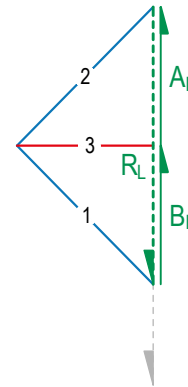
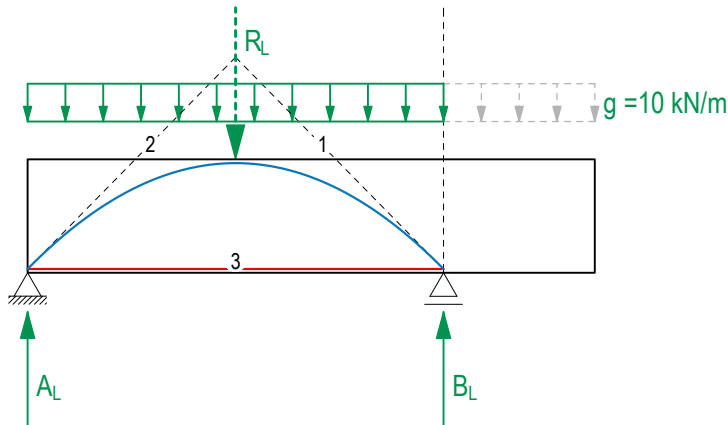
Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm \triangleq 15kN

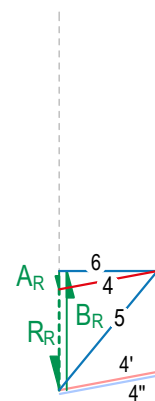
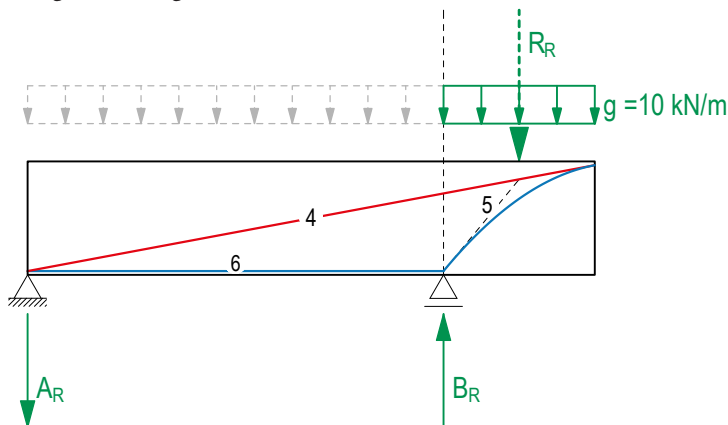
7.3

Gesucht wird ein möglicher Kräfteverlauf im Balken, der die angreifende Linienlast in die beiden Auflager leitet. Um ein solches kombiniertes System, das sowohl spannt als auch auskragt, zu lösen, wird die Linienlast in zwei Subsysteme unterteilt. Beide Subsysteme werden in der Folge separat betrachtet und am Ende überlagert.

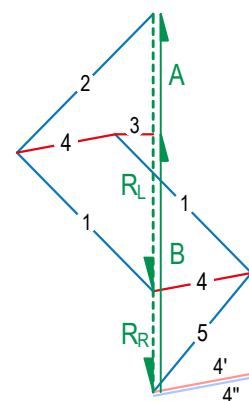
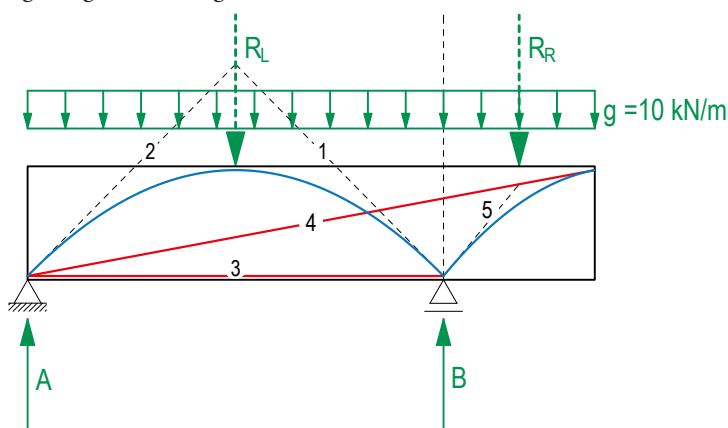
Zuerst wird das globale Gleichgewicht im linken Subsystem ermittelt. Unter der gegebenen Belastung ergibt sich zwischen den Auflagern eine Parabel, deren seitlicher Schub mittels eines Zugbandes aufgenommen werden muss.



Dann wird das globale Gleichgewicht des rechten Subsystems ermittelt. Die Parabel, welche sich unter dieser Belastung einstellt, verläuft rechts nicht in ein Auflager. Diese Druckkraft muss daher von einem Zugband zurückgezogen werden. Wichtig ist dabei, dass die Richtung der rechten Bogentangente derjenigen des Zugbandes entspricht und sich die beiden Elemente so gegenseitig aufheben. Um die Horizontalkomponente des Bogens in Auflager B zu kompensieren, wird zusätzlich ein Druckelement zwischen den Auflagern benötigt.



Schliesslich werden die beiden Subsysteme grafisch überlagert. Im Kräfteplan kann zuerst das globale Gleichgewicht der beiden Subsysteme addiert und danach die inneren Kräfte Knoten für Knoten zusammengeführt werden. Aus den beiden oberen Kräfteplänen geht hervor, dass das Element zwischen den Auflagern eine grössere Zugkraft aufnimmt, weshalb es sich also auch bei der Überlagerung um ein Zugelement (3) handeln muss.



Lagepläne 1:100

Kräftepläne 1cm $\hat{=}$ 15kN

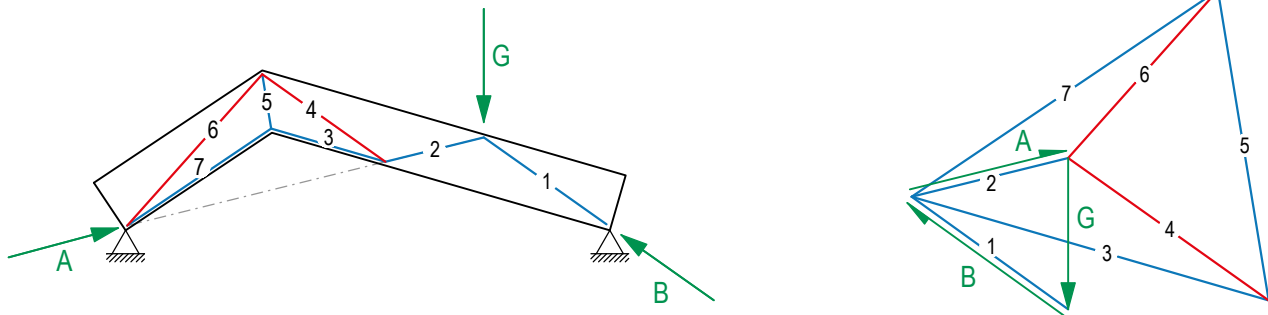
8.1

Umlenkung von Kräften

Um bei Balken, Rahmen oder Wandscheiben mögliche, notwendige Umlenkungen der inneren Kräfte zu entwickeln, ist es zweckmässig, vom direkten Verlauf der angreifenden Kraft in die Auflager auszugehen. Mit dieser sogenannten Stützlinie wird das globale Gleichgewicht gefunden. Da es allerdings sein kann, dass die Stützlinie ausserhalb des Materials verläuft, müssen die inneren Kräfte so umgelenkt werden, dass diese im Material bleiben.

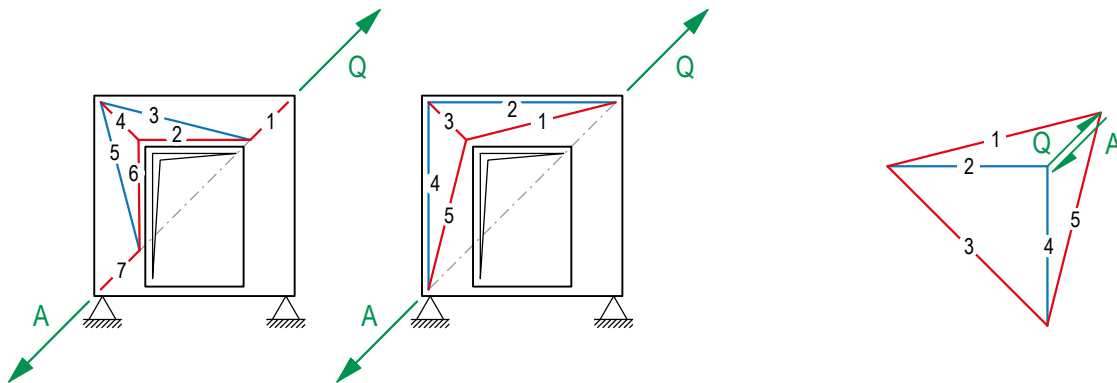
Rahmenecke

Zuerst wird mittels der Stützlinie das globale Gleichgewicht gefunden. Wird dann der innere Kräfteverlauf betrachtet, so folgt Element 1 der Stützlinie und leitet die angreifende Kraft auf der rechten Seite direkt ins Auflager B. Auf der linken Seite verläuft die Stützlinie jedoch ausserhalb des Materials, weshalb dort diese Druckkraft umgelenkt werden muss. Sie wird also ab dort, wo sie das Material verlassen würde, mit Hilfe von zwei Zugseilen und einem zusätzlichen Druckstab ins Auflager A geführt.



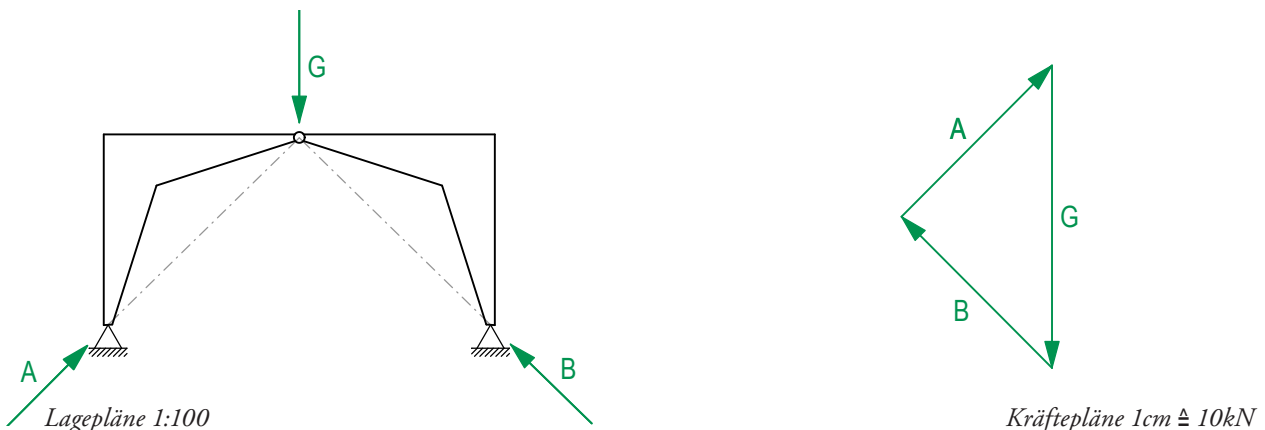
Wandscheibe mit Öffnung

Im unteren linken Beispiel folgt der Kräfteverlauf, analog zur Rahmenecke, der Stützlinie so lange, wie diese im Material bleibt und wird ab dort umgelenkt, wo diese das Material verlässt. Zum Vergleich ist im rechten Beispiel die einfachste Art einer Umlenkung dargestellt, bestehend aus zwei Kragarmen und einer Rahmenecke. So können im Lageplan und folglich im Kräfteplan Elemente gespalt werden. Diese einfachste Umlenkung kann sinngemäss sowohl für Druck- als auch für Zügelemente angewendet werden.



Gelenke und globales Gleichgewicht

Die Wirkungslinien der angreifenden Kraft sowie diejenigen der Auflagerkräfte (Stützlinie) schneiden sich im Lageplan immer im Gelenk, da dort die Summe aller Kräfte gleich null ist. Dies hilft uns dabei, das globale Gleichgewicht zu finden.

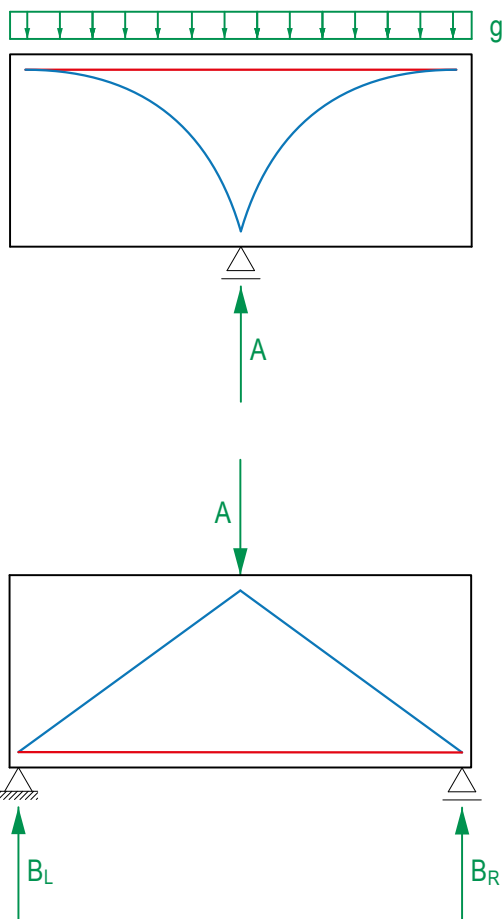
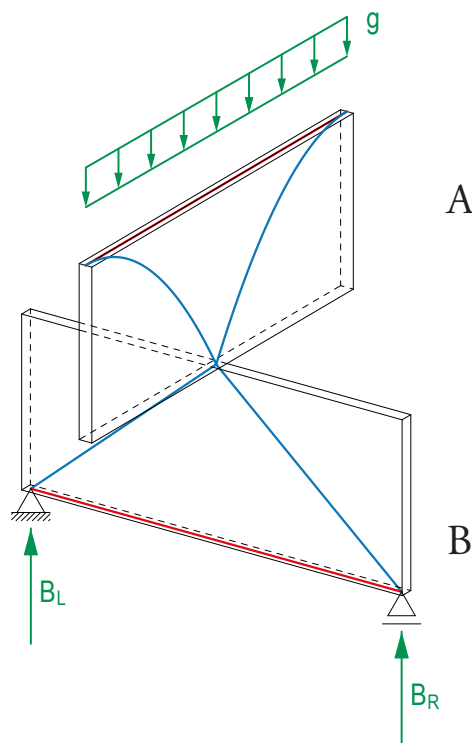


9.1

Übertragen vertikaler Kräfte

Gesucht wird ein möglicher Kräfteverlauf, der die angreifende Linienlast durch die obere Scheibe auf die untere abträgt und von dort in die beiden Auflager bringt.

Um ein solches System zu lösen, werden die beiden Scheiben als einzelne Subsysteme betrachtet: Die obere Scheibe mit der angreifenden Linienlast bildet dabei das erste Subsystem (A), und die untere Scheibe mit den beiden Auflagern ist ein zweites Subsystem (B). Ihr Berührungspunkt wird als Auflager des Subsystems A, sowie als Angriffspunkt der Kraft des oberen auf das untere Subsystem verstanden.



Beide Subsysteme werden isoliert betrachtet gelöst. Auf die obere Scheibe (Subsystem A) wirkt eine Linienlast und sie besitzt ein Auflager. Für die gegebene Situation stellt sich der eingezeichnete Kräfteverlauf ein. Die inneren Kräfte sowie die Auflagerkraft A wird im zugehörigen Kräfteplan ermittelt. Schliesslich wird der Kräfteverlauf qualitativ in die axonometrische Darstellung skizziert.

Wird nun die untere Scheibe (Subsystem B) isoliert betrachtet, so wirkt Subsystem A als äussere Kraft auf den Berührungspunkt. Die Grösse dieser Kraft entspricht der Auflagerkraft des Subsystems A. Beim Wechsel des Systems muss jedoch die Richtung der Kraft geändert werden. Die angreifende Kraft wird schliesslich über zwei Druckelemente in beide Auflager geleitet. Mit der bereits gefundenen Grösse der Kraft A kann der Kräfteplan vervollständigt und der Kräfteverlauf wiederum qualitativ in die axonometrische Darstellung übertragen werden.

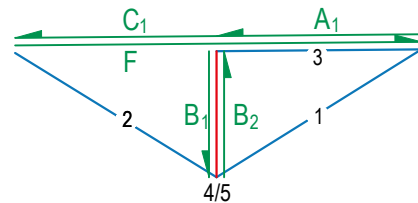
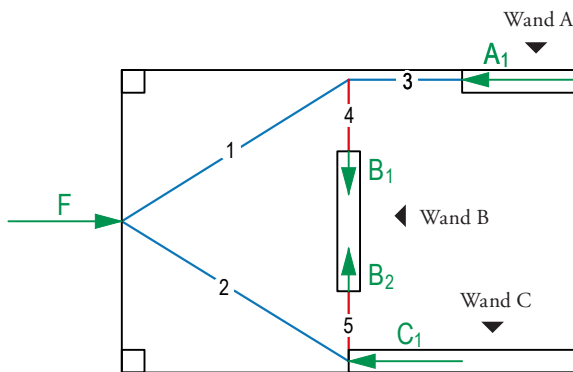
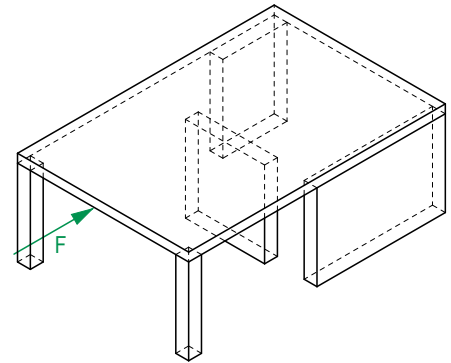
10.1

Horizontale Kräfte

Gesucht ist ein möglicher Kräfteverlauf in einer Deckenplatte, welcher die horizontal angreifende Last in die vertikal abtragenden Bauteile bringt. Um eine solche Situation zu lösen, werden die Elemente (Deckenplatte und Wände) als einzelne Subsysteme betrachtet.

Da Wände nur Kräfte entlang ihrer Achse aufnehmen können, werden als erstes die möglichen Wirkungslinien der Wände und damit auch deren Schnittpunkte eingezeichnet. Ergibt sich mehr als ein Schnittpunkt, so ist das System aussteift. Die angreifende Kraft wird, wenn möglich, in die gefundenen Schnittpunkte geführt und kann dann in die Achsen der Wände umgeleitet werden. Im unteren Beispiel wird die Kraft F über zwei Druckelemente in die Schnittpunkte geführt. Von dort wird die Druckkraft mit jeweils einem Zugband in Richtung der Wand B umgelenkt und in die Wände A und C eingeleitet.

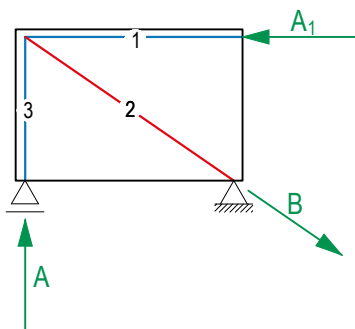
Der innere Kräfteverlauf wird schliesslich mit den äusseren Kräften, welche von den Wänden auf das Subsystem «Decke» wirken, ergänzt und deren Grösse im Kräfteplan ermittelt. Der Kräfteverlauf in der Decke befindet sich im globalen Gleichgewicht, wenn sich alle äusseren Kräfte im Kräfteplan gegenseitig aufheben.



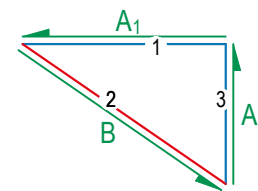
Um nun die horizontalen Kräfte in der Decke über die Wände in den Boden zu bringen, muss in jeder Wand ein entsprechender Kräfteverlauf gefunden werden.

Wand A wird von oben betrachtet (siehe Pfeil), was bedeutet, dass die Krafteinwirkung durch die Decke dabei auf der rechten Seite der Wand geschieht. Die Grösse der angreifenden Kraft A_1 entspricht dabei der im Subsystem «Decke» gefundenen Auflagerkraft A_1 . Wiederum muss beim Wechsel zwischen den Subsystemen die Richtung der Kraft geändert werden.

Es drückt nun also eine Kraft A_1 von rechts auf die Wand. Diese Kraft wird dann bis ganz nach links durch die Wand geführt, dort mit einem Zugelement umgeleitet und verläuft so schliesslich senkrecht ins Rolllager. Das Zugseil kann direkt ins zweite Auflager geführt werden. Die Einwirkung durch die Kraft A_1 resultiert schlussendlich in den Auflagerkräften A und B. Analog kann nun noch mit den beiden anderen Subsystemen der Wände B und C verfahren werden.



Lagepläne 1:100



Kräftepläne 1cm \triangleq 10kN

10.2 Kompendium Tragwerksentwurf I&II

Knicken

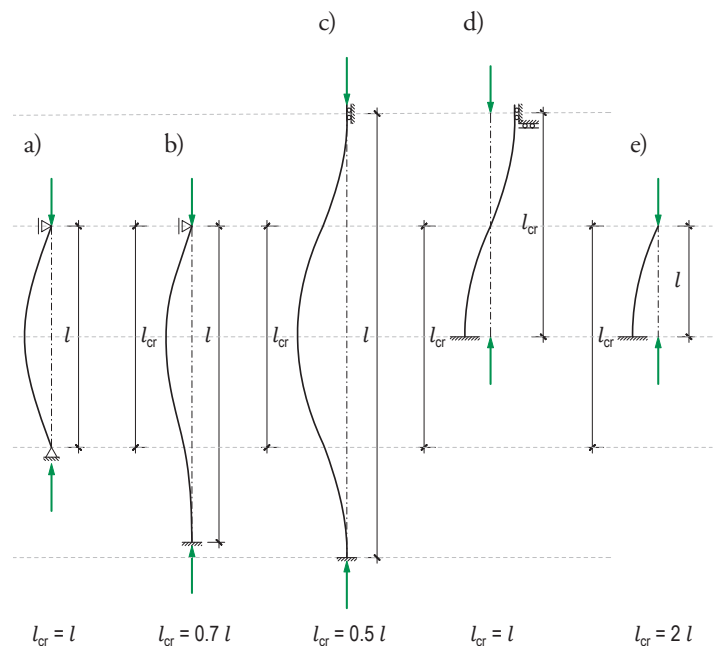
Beim Dimensionieren von Stützen wird mittels der massgebenden (maximalen) Kraft, welche auf das Element wirkt, die notwendige Querschnittsfläche berechnet. Soll ein Element nun allerdings sehr lang und dünn, also mit einer grossen Schlankheit ausgeführt werden, besteht die Gefahr, dass es unter der Druckkraft knickt. Bevor es also zu einem Materialversagen kommen kann, kommt es in diesem Fall zu einem Knickversagen, was insofern ein Problem geometrischer Art ist. Um diesem entgegenwirken, kann für die Stütze beispielsweise ein besser geeigneter Querschnitt gewählt werden.

Im unteren Diagramm ist auf der x-Achse die kritische Länge l_{cr} über der Wurzel der Querschnittsfläche A aufgetragen.

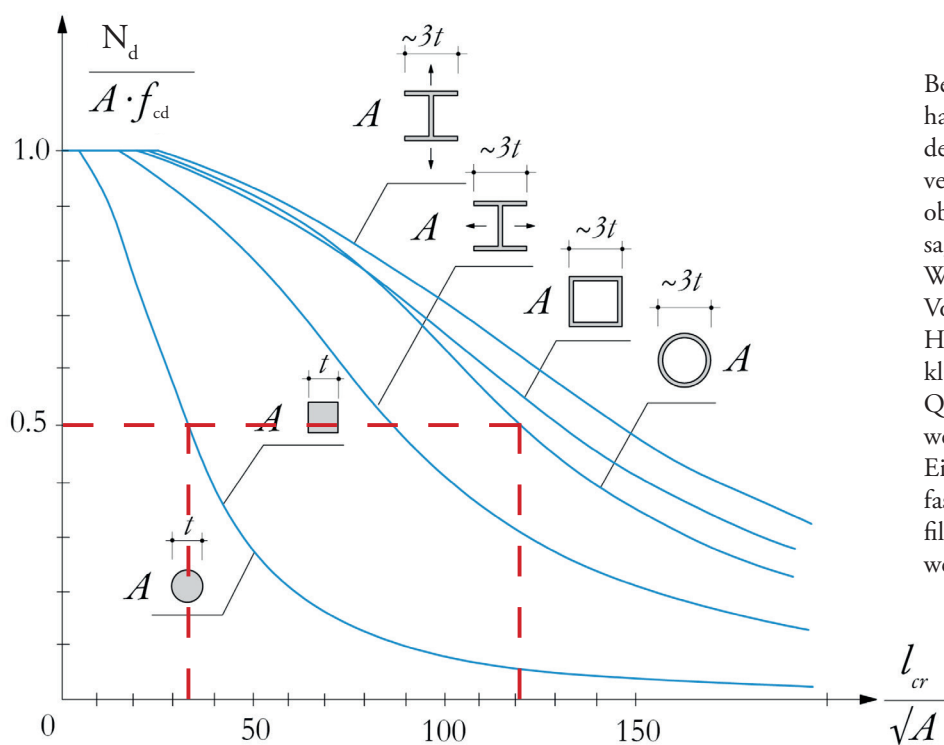
Die kritische Länge ist dabei abhängig von der Lagerung des Elements. Eine eingespannte Stütze weist eine geringere kritische Länge auf als eine gelenkig gelagerte Stütze. Das Diagramm rechts zeigt folgende Randbedingungen:

- a) beidseitig gelenkig gelagert
- b) unten eingespannt, oben gelenkig
- c) beidseitig eingespannt
- d) unten fest eingespannt, oben verschiebl. eingespannt
- e) unten eingespannt, oben ohne Auflager

Auf der y-Achse ist die massgebende Kraft N_d über der Querschnittsfläche A multipliziert mit der Druckfestigkeit des Materials f_{cd} dargestellt. Je höher dieser Wert, um so eher knickt ein Bauteil.



Kritische Länge in Abhängigkeit zur Auflagersituation



Knickkurven von Stahlprofilen

Betrachten wir die Kurven zum Knickverhalten verschiedener Querschnitte, so bedeutet jeder Punkt, der unterhalb der Kurve liegt, dass das Profil hält; jeder Punkt oberhalb der Kurve bedeutet ein Knickversagen des entsprechenden Profils.

Wird nun die Knickkurve eines runden Vollprofils mit derjenigen eines runden Hohlprofils verglichen, so wird schnell klar, dass das Vollprofil bei gleicher Kraft, Querschnittsfläche und gleichem Material wesentlich eher knickt, als ein Hohlprofil. Eine Stütze ausgeführt als Hohlprofil kann fast viermal so lang sein, wie eine Vollprofil-Stütze, bevor sie unter der selben Last wegnickt.